



MÉMOIRES

SUR LA

RÉSISTANCE DES SOLIDES,

DEUXIÈME PARTIE

NOTES SUR LA FLEXION DES PIÈCES À DOUBLE COURBURE;

PAR **M. DE SAINT-VENANT,**

Ingenieur en chef des Ponts et Chaussées, Membre de la
Société Philomatique.

PRIX : 4 FR. 80 C.



PARIS,

BACHELIER,

IMPRIMERIE-LIBRAIRIE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, QUAI DES
AUGUSTINS, 55.

Quai des Augustins, n° 55.

CARILIAN-GOEURY ET DALMONT,

LIBRAIRES DES CORPS ROYAUX DES PONTS ET CHAUSSEES
ET DES MINES.

Quai des Augustins, n° 39.

1844.



Ces Mémoires, imprimés successivement, par extrait, dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* et dans le *Journal de Mathématiques* de M. Liouville, ont eu pour objet de compléter, de rectifier et de simplifier sur plusieurs points la théorie connue de la résistance des corps solides employés ordinairement dans la construction.

Pour mieux comprendre le premier Mémoire (celui du 30 octobre), il est bon de se reporter quelquefois aux autres, car,

1°. L'expression du gauchissement $\gamma = \theta \frac{\mu - \mu'}{\mu + \mu'}$, page 4, que l'on invoque pour composer les expressions (2), se trouve démontrée à la page 9 du quatrième Mémoire (du 20 novembre), sur la *torsion des prismes*.

2°. Les expressions (3) $\left[E(\gamma_\theta + au + bv) - \frac{1}{4}(\pi_u + \pi_v) \right] d\omega$ de la page 5, $\gamma_\theta = -\frac{1}{4}\gamma$ et $G = \frac{2}{5}E$ du haut de la page 7, se trouvent démontrées au quatrième Mémoire, savoir, au bas de sa page 3 et au haut de sa page 4.

La lecture de ce quatrième Mémoire (du 20 novembre) sur la *torsion*, suppose seulement admises (page 3) les formules fondamentales (1), (2), (3), (4) de la mécanique moléculaire, qui sont très-connues pour le

cas surtout où l'élasticité est la même en tous sens, et où les coefficients a sont tous égaux. Elle n'exige pas, du reste, que l'on recoure aux *Exercices de Mathématiques* de M. Cauchy, car on a reproduit son analyse en ce qui concerne la torsion du prisme à base rectangle.

3°. L'intégration des équations (15), dont on parle page 11 du premier Mémoire, et qui conduit aux expressions (16), se trouve détaillée au deuxième Mémoire, extrait du Journal de M. Liouville.

4°. Quoique le cinquième Mémoire (du 1^{er} juillet 1844) soit relatif à un cas plus étendu, en ce qui regarde la grandeur des déplacements, ses deux premiers articles peuvent servir aussi de développement au commencement de l'article 15 du premier Mémoire.

INSTITUT DE FRANCE.

ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES.

(Extrait des Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, séance du 30 octobre 1843.)

MÉMOIRE

Sur le calcul de la résistance et de la flexion des pièces solides à simple ou à double courbure, en prenant simultanément en considération les divers efforts auxquels elles peuvent être soumises dans tous les sens;

PAR M. BARRÉ DE SAINT-VENANT.

(EXTRAIT.)

§ 1^{er}. — Exposition.

« 1. C'est en exprimant l'équilibre des forces extérieures qui agissent sur une pièce solide, avec les forces intérieures qui s'exercent à travers une de ses sections transversales, que l'on parvient à déterminer la grandeur des dilatations et contractions éprouvées par ses diverses parties; ce qui permet, d'une part, d'établir les conditions de sa résistance aux efforts donnés, et, de l'autre, de calculer si l'on en a besoin les déplacements de ses points et les changements de forme qui en résultent.

» Mais on sait que l'équilibre de forces dans l'espace s'exprime en général par six équations, trois de composantes et trois de moments; et, cependant, la théorie actuelle de la résistance des solides, telle que l'ont constituée les utiles et si importants travaux de Navier, ne pose jamais que deux équations.

» Est-ce parce que cette théorie se borne toujours à des cas où les quatre autres équations n'existent pas? Non, car non-seulement elle n'embrasse point,



par exemple, le cas des courbes à double courbure, le cas où une pièce est à la fois fléchie et tordue, etc., mais encore elle passe sous silence, dans les cas qu'elle traite, plusieurs de leurs circonstances essentielles.

De plus, cette théorie suppose que les sections planes restent planes, et que les fibres dans lesquelles on conçoit la pièce divisée se comportent comme si elles étaient isolées ou sans action les unes sur les autres. Or des recherches récentes, basées sur les travaux mêmes de Navier, et dont les expériences de MM. Savart et Cagniard de Latour ont confirmé les résultats, ne permettent plus d'admettre dans plusieurs cas ces deux hypothèses.

On a fait un autre reproche à la théorie actuelle, c'est sa complication, au moins apparente, car elle donne toujours le calcul des déplacements des points avant les conditions de non-rupture; ce calcul est cependant inutile dans la plupart des cas, et l'on peut établir plus simplement les équations de résistance qui sont ce qu'il y a de plus essentiel pour la pratique.

Enfin, cette théorie ne donne pas de méthode générale pour déterminer les réactions de points fixes, ainsi que les actions mutuelles inconnues des diverses pièces d'un même système, d'où il suit que Navier, tout en résolvant d'une manière satisfaisante beaucoup de cas qui ne l'avaient pas encore été, est revenu, pour beaucoup d'autres, à ces décompositions d'efforts, purement hypothétiques, dont on s'était contenté jusqu'à lui.

Je cherche, dans mon Mémoire, à combler ces lacunes, à réparer ces inexactitudes et à faire disparaître toute complication inutile. Je fais entrer dans le calcul les effets de glissement latéral dus à ces composantes transversales dont l'omission a été l'objet principal d'une sorte d'accusation portée par M. Vicat contre toute la théorie de la résistance des solides. Je montre comment, à l'aide d'une seconde équation de moments transversaux, on résout très-simplement ce cas général signalé par M. Persy, où l'équilibre posé comme à l'ordinaire ne saurait exister, et où la flexion de la pièce se fait nécessairement dans une autre direction que celle où elle est sollicitée à fléchir. J'étends les calculs de résistance aux cas de flexion et torsion simultanées qui doivent s'offrir souvent si l'on considère qu'une pièce tordue ne l'est presque jamais par ce qu'on appelle un couple. Je tiens compte de ce que les sections planes deviennent gauches, de ce qu'elles s'inclinent un peu sur la fibre centrale, et de ce que les fibres exercent les unes sur les autres une action qui n'est pas tout à fait à négliger. Je donne des équations différentielles nouvelles pour les petits déplacements des points des pièces courbes à double courbure, et les intégrales, d'une forme très-simple, que j'ai tirées

de ces trois équations simultanées du troisième ordre à coefficients non constants.

» Je donne aussi des exemples d'application pratique de la plupart des formules nouvelles, enfin une méthode générale de détermination des réactions et actions mutuelles qui ne peuvent être déduites des forces données par les équations ordinaires de la statique : je pense que si l'on se donne la peine de poser et de résoudre toutes les équations, nombreuses il est vrai, mais toutes du premier degré, auxquelles conduit cette méthode pour chaque cas, l'expression des conditions de résistance dans les systèmes quelconques de charpente offrira un jour aussi peu d'indétermination et d'arbitraire que celles qui sont relatives aux ponts suspendus (*).

§ II. — Équations d'équilibre des forces intérieures et extérieures.

» 2. J'appelle *dilatation*, dans le sens d'une petite droite matérielle à l'intérieur d'un corps, la proportion de l'allongement (positif ou négatif) que cette droite a éprouvé par suite des déplacements des molécules; et *glissement*, sur une petite face plane matérielle, l'inclinaison qu'a prise sur cette face une droite qui lui était primitivement perpendiculaire : le mouvement de la face contribue au glissement comme celui de la droite.

» Soient ω l'une des sections faites transversalement à une pièce solide, et normalement à l'axe droit ou courbe qui unit leurs centres de gravité;

» u et v les coordonnées du centre m de l'élément $d\omega$ par rapport aux deux axes principaux d'inertie de la section passant par le centre de gravité M ;

» r la distance Mm ;

» δ la dilatation longitudinale éprouvée par une *fibbre*, ou par une portion prismatique du corps, presque parallèle à l'axe, ayant $d\omega$ pour base, et se terminant à une deuxième section très-voisine ω' ;

» g le glissement sur la section ω au point m ;

» g', g'' ce même glissement estimé parallèlement aux deux axes principaux des u et des v ;

» $\delta_0, g_0, g'_0, g''_0$ les valeurs de ces quantités pour $u = 0, v = 0$;

» $\mu = \int v^2 d\omega, \mu' = \int u^2 d\omega$ les moments d'inertie de la section ω autour de l'axe des u et de l'axe des v .

(*) Une partie des formules et des méthodes de ce Mémoire a été donnée, en 1837 et 1838, aux élèves de l'École des Ponts et Chaussées, dans le cours de Mécanique appliquée que j'y ai fait par intérim sur la proposition de M. Coriolis.

« Malgré la petite inclinaison des fibres sur les deux sections, il est facile de voir qu'en négligeant les quantités très-petites d'ordre supérieur ainsi que la petite influence de la courbure des sections sur la longueur des fibres (voyez plus loin), l'expression de cette longueur entre les deux sections sera du premier degré en u et v , après comme avant les déplacements, et il en sera de même de la dilatation; on a donc pour celle-ci une expression :

$$(1) \quad \lambda = \lambda_0 + au + bv.$$

« Le glissement au point m proviendra : 1° de ce que la section ω' aura tourné d'un petit angle devant la section ω : si θ est le quotient de ce petit angle par la distance des deux sections, θr sera l'inclinaison acquise sur l'axe de la pièce par l'ancienne normale à la section ω au point m , ce qui donne des projections θv , $-\theta u$ sur deux plans perpendiculaires à ω , et passant par les axes des u et des v ; 2° de ce que l'axe lui-même s'est incliné, sur la section, d'un petit angle g_0 , dont les projections sur les mêmes plans ont été appelées g'_0 , g''_0 ; 3° enfin de ce que cette face est devenue gauche. Il est facile de voir par quelques exemples que si w est la très-petite distance d'un point de cette face à son plan tangent central, sa forme doit être du genre de celle que représente l'équation $w = \gamma.uv$ (à peu près une double aile de moulin à vent), et c'est ce qui résulte aussi d'une analyse de M. Cauchy; en sorte que la quote-part du ganchissement dans le glissement estimé suivant les sens des u et des v , peut être représentée approximativement par $-\gamma v$, $-\gamma u$.

« Donc

$$g' = g'_0 + \theta v - \gamma v, \quad g'' = g''_0 - \theta u - \gamma u.$$

Mais le ganchissement γ et la torsion θ ne sont pas indépendants l'un de l'autre. M. Cauchy a trouvé pour une section rectangle, et j'ai trouvé également, en appliquant son analyse à une section d'une autre forme,

$$\gamma = \theta \cdot \frac{\mu - \mu'}{\mu + \mu'},$$

d'où

$$(2) \quad g' = g'_0 + \frac{2\mu'}{\mu + \mu'} \theta v, \quad g'' = g''_0 - \frac{2\mu}{\mu + \mu'} \theta u.$$

« 3. Soient maintenant :

« P, la somme des composantes, parallèles à la tangente à l'axe de la pièce au point M, de toutes les forces qui agissent depuis ce point jusqu'à une des extrémités de la pièce;

» P_u, P_v les mêmes composantes dans les sens des axes principaux Mu, Mv de la section;

» M_I, M_u, M_v les sommes des moments des mêmes forces autour des trois mêmes lignes rectangulaires;

» E le coefficient par lequel il faut multiplier la dilatation d'un prisme isolé, d'un mètre carré de base, pour avoir la force qui en est capable;

» G le coefficient du même genre, relatif aux glissements;

» π_u, π_v les pressions latérales que peut éprouver, sur ses deux faces perpendiculaires aux u et aux v , et par unité superficielle, la fibre qu'on a considérée. J'écarte le cas rare (comme celui d'un frottement considérable exercé sur les côtés de la pièce) où ces pressions ne seraient pas perpendiculaires aux fibres.

» La force capable de produire la dilatation de la fibre serait... $E\omega(\gamma_0 + au + bv)$ sans les pressions π_u, π_v ; mais on sait que ces deux forces engendrent chacune une dilatation longitudinale égale au quart de la contraction latérale dont elles sont capables (on se borne, dans cet extrait, au cas d'une élasticité égale en tous sens); donc la force longitudinale n'est que

$$(3) \quad [E(\gamma_0 + au + bv) - \frac{1}{4}(\pi_u + \pi_v)]d\omega.$$

Nous l'écrirons, en supposant approximativement que π_u, π_v sont des fonctions du premier degré de u et v ,

$$(4) \quad E(\gamma_0 + a'u + b'v).$$

On aura les forces intérieures transversales en multipliant les expressions (2) par $Gd\omega$.

» Prenons donc les sommes de composantes et de moments des forces intérieures par rapport aux mêmes axes que les forces extérieures, nous aurons pour l'équilibre, en égard à $\int u d\omega = 0, \int v d\omega = 0, \int uv d\omega = 0,$

$$(5) \quad \begin{cases} P_I = E\omega\gamma_0, & P_u = G\omega g_0', & P_v = G\omega g_0', \\ M_u = E\mu\gamma', & M_v = E\mu'a', & M_I = G \cdot \frac{2\mu \cdot 2\mu'}{\mu + \mu'} \theta. \end{cases}$$

§ III. — Condition de résistance à la rupture ou à l'altération de l'élasticité.

4. On tire des formules (2), (3), (4), (5) :

$$(6) \quad \delta = \frac{P_r}{E_w} + \frac{M_s}{E_\mu} \nu + \frac{M_t}{E_\mu'} u + \frac{1}{4} \frac{\pi_s + \pi_r}{E},$$

$$(7) \quad g' = \frac{P_r}{G_w} + \frac{M_t}{2 G_\mu} \nu, \quad g' = \frac{P_r}{G_w} - \frac{M_t}{2 G_\mu'} u; \quad \text{et l'on a } g = \sqrt{g'^2 + g''^2}.$$

Soient donc $\frac{R_s}{E}$, $\frac{\Gamma_s}{G}$ la plus grande dilatation et le plus grand glissement transversal auxquels on puisse soumettre sans danger un prisme de même matière (o désigne que les forces R_o , Γ_o ne doivent altérer en rien l'élasticité, même à la longue); on aura pour les équations de résistance :

1°. Si P_s , P_r , M_t sont nuls, c'est-à-dire s'il n'y a que des dilatations (ou des flexions proprement dites, provenant de dilatations inégales des fibres),

$$(8) \quad R_{ou} \geq \text{maximum numérique de } \frac{P_r}{w} + \frac{M_s}{\frac{1}{\nu} \mu} + \frac{M_t}{\frac{1}{u} \mu'} + \frac{1}{4} (\pi_s + \pi_r);$$

2°. Si P_t , M_s , M_r , π_s , π_r sont nuls, c'est-à-dire s'il n'y a que des glissements (ou des torsions),

$$(9) \quad \Gamma_{ou} \geq \text{maximum numérique de } \left(\frac{P_r}{w} + \frac{M_t}{2 \cdot \frac{1}{\nu} \mu} \right)^2 + \left(\frac{P_r}{w} - \frac{M_t}{2 \cdot \frac{1}{u} \mu'} \right)^2.$$

5. Mais s'il y a en même temps des dilatations et des glissements, ces formules ne peuvent plus servir; tout glissement produit, dans des directions obliques déterminées, des écartements et rapprochements moléculaires, et c'est pour cela qu'il peut devenir dangereux. Ses effets concourent donc avec ceux des dilatations.

Or il est facile de prouver que si δ_g représente la dilatation qui a lieu dans la direction du glissement g , au point m que nous avons considéré, on aura, dans une direction faisant avec la fibre un angle φ tel que $\tan 2\varphi = \frac{g}{\delta - \delta_g}$; une dilatation

$$(10) \quad \frac{1}{2} (\delta - \delta_g) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\delta - \delta_g)^2 + g^2},$$

et que cette dilatation (positive ou négative) est la plus grande qui ait lieu autour du point m .

• C'est l'expression (10) dont il faut évaluer le maximum à $\frac{R_0}{E}$ pour avoir l'équation de résistance applicable à tous les cas. Bornons-nous, dans cet extrait, au cas où π_n, π_r sont négligeables, on aura, comme l'on sait, $\delta_r = -\frac{1}{4}\delta$, et l'expression (10) deviendra (*)

$$(11) \quad \delta = \pm \frac{5}{8} \sqrt{\delta^2 + \left(\frac{4}{5}g\right)^2}$$

• Donc on a, eu égard à ce que, comme l'on sait aussi, $G = \frac{2}{5}E$,

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} R_0 \text{ ou } > \text{maxim. num. de } \frac{3}{8} \left(\frac{P_t}{\omega} + \frac{M_n}{\frac{1}{\mu}} + \frac{M_r}{\frac{1}{\mu'}} \right) \\ \pm \frac{5}{8} \sqrt{\left(\frac{P_t}{\omega} + \frac{M_n}{\frac{1}{\mu}} + \frac{M_r}{\frac{1}{\mu'}} \right)^2 + \left(2 \frac{P_r}{\omega} + \frac{M_r}{\frac{1}{\mu'}} \right)^2} \end{array} \right.$$

• 6. Cette expression redonne l'équation (9) lorsque P_t, M_n, M_r sont nuls et que l'on admet $\Gamma_0 = \frac{4}{5}R_0$.

• Observons aussi qu'elle est plus simple et plus symétrique que si l'on se fût tenu, en ce qui regarde la torsion, à la théorie ordinaire qui néglige le *gauchissement*.

• Elle se simplifie davantage dans les cas les plus ordinaires où les termes en P_t, P_n, P_r sont négligeables; mais elle acquiert un degré de simplicité remarquable quand alors la section devient un cercle, un carré ou une de ces étoiles à quatre pointes dont on fait fréquemment usage pour les pièces de fonte. Alors $\mu = \mu'$, et si M_d est le plus grand des deux moments autour des diagonales ou plus grands diamètres $2r'$ de la section, on a

$$(13) \quad R_0 = \text{maxim. num. } \frac{1}{\frac{1}{\mu}} \left(\frac{3}{8} M_d \pm \frac{5}{8} \sqrt{M_d^2 + M_t^2} \right);$$

(*) J'ai trouvé cette formule en 1837; M. Poncelet l'a donnée à son cours de Mécanique industrielle de la Faculté, et a insisté sur la nécessité de prendre en considération ce qu'elle introduit. Il a bien voulu me citer dans ses feuilles inédites.

et la quantité du second membre se réduit à $\frac{1}{4\pi r^2} \left(\frac{3}{8} M_d \pm \frac{5}{8} M \right)$ pour un cercle, M étant le moment *total* des forces.

« Ou je me trompe fort, ou la simplicité de ces formules de résistance pour les cas de flexion et torsion simultanées confirme la vérité des principes qui ont servi à les poser.

« En supprimant ou $>$, et *maximum*, *numérique* de ces formules, elles deviennent autant d'équations dites d'*égale résistance*.

§ IV. — *Application à quelques exemples: Différences avec les résultats de l'ancienne théorie.*

« 7. *Pièce rectangulaire sollicitée perpendiculairement à son axe, mais obliquement aux côtés de sa base.* — Soient b, c les deux côtés de la base, a la longueur de la pièce encastree par un bout, P la force qui la sollicite à l'autre bout, φ l'angle de cette force et du côté c ; on a (formule 6)

$$R_0 = \frac{6aP}{bc^2} (b \cos \varphi + c \sin \varphi),$$

formule plus simple que celle $\frac{6aP}{bc^2} \cdot \frac{b \sin \varphi + c \cos \varphi}{b^2 \sin^2 \varphi + c^2 \cos^2 \varphi}$ de l'ancienne théorie, où l'on ne prend qu'un seul moment autour d'une droite oblique, en omettant l'autre moment des forces intérieures.

« Si l'angle φ est demi-droit, le rapport des valeurs de P tirées de l'ancienne et de la nouvelle formule sera de 1,08 quand $c = 1,5b$, de 1,25 quand $c = 2b$, de 1,67 quand $c = 3b$; d'où il suit que la formule ancienne peut donner aux constructeurs une fausse sécurité, en les induisant à charger la pièce de poids beaucoup plus forts que ceux qu'elle peut supporter.

« 8. *Pièce rectangulaire d'une petite longueur encastree par un bout et sollicitée perpendiculairement à l'autre bout.* — Alors P_n n'est pas à négliger, et l'on trouve

$$R_0 = \frac{6aP}{bc^2} \left[\frac{3}{8} + \frac{5}{8} \sqrt{1 + \left(\frac{c}{3a} \right)^2} \right].$$

Tout ce dont la quantité entre crochets du second membre excède l'unité représente la part d'influence de cette composante transversale qui tend à trancher les fibres, et que l'ancienne théorie négligeait. Cet excès, pour $c = a, 2a, 3a, 4a$, est successivement $3\frac{1}{2}, 12\frac{1}{2}, 26, 42$ p. 100.

« 9. *Même pièce, le poids P étant distribué uniformément sur sa surface*

supérieure. — Je la prends comme exemple de l'influence de la pression latérale aux fibres (n° 4). Alors

$$\frac{\pi_2}{4} = \frac{P}{4ab},$$

et

$$R_0 = \frac{6}{b^2} \frac{P}{c^2} \left[\frac{3}{8} \left(1 + \frac{1}{12} \frac{c^2}{a^2} \right) + \frac{5}{8} \sqrt{\left(1 + \frac{1}{12} \frac{c^2}{a^2} \right)^2 + \frac{1}{9} \frac{c^2}{a^2}} \right].$$

» L'influence est bien plus grande que celle du glissement transversal, car la quantité entre crochets excède l'unité, pour $c = a$, de $11 \frac{1}{2}$ pour 100, et pour $c = 2a$, de 43 pour 100.

» Même, dans le cas du numéro précédent, il doit y avoir une pression latérale, difficile à évaluer exactement, mais dont l'influence doit bien égaler celle du glissement.

» 10. *Solides d'égale résistance.* — La prise en considération des glissements sert à faire disparaître de la théorie de ces solides un paradoxe auquel conduisent les formules ordinaires : elles donnent, comme l'on sait, une épaisseur nulle sur les points d'appui. Les miennes ne font pas tomber sur un pareil résultat, qui tenait à ce qu'on négligeait la composante transversale P_v .

» 11. *Pièce rectangulaire, à la fois fléchie et tordue.* — Supposons que le poids P de la pièce du n° 7 agisse par l'intermédiaire d'un bras de levier horizontal d'une longueur h , on aura :

$$R_0 = \frac{6aP}{b^2c^2} (b \cos \varphi + c \sin \varphi)^2 \left[\frac{3}{8} + \frac{5}{8} \sqrt{1 + \frac{h^2}{a^2} \cdot \frac{b^2 + c^2}{(b \cos \varphi + c \sin \varphi)^2}} \right].$$

» Soit $\varphi = 0$; la quantité entre crochets excédera l'unité

Pour $c = b$, $h = \frac{1}{2}a$, de 0,14 $h = a$, de 0,46	Pour $c = 2b$, $h = \frac{1}{2}a$, de 0,31; $h = a$, de 0,91.
--	---

C'est la proportion de l'influence de la torsion, que les nouvelles formules apprennent à estimer.

» 12. *Arbre tournant, à section circulaire ou carrée, fléchi et tordu sous l'action de deux engrenages ou de deux courroies.* — La formule très-simple (13) sert à ce cas.

» 13. *Demi-cercle horizontal encastré à un bout et sollicité à l'autre par un poids.* — La rupture ne tend pas à se faire au point d'encastrement comme pour les pièces droites, mais aux 0,226 de la longueur, et la résis-

tance est $\frac{1}{408}$ celle d'une pièce droite d'une longueur égale au diamètre.

° 14. *Ressort en hélice vertical, tiré ou pressé par un poids P.* — Soient a le rayon du cylindre de l'axe, r le rayon du ressort à section circulaire, φ l'angle constant de l'axe avec l'horizon, la formule complète donne

$$R_0 = \frac{4P}{\pi r^3} \left[\frac{3}{8} \left(a + \frac{r}{4} \right) \sin \varphi + \frac{5}{8} \sqrt{\left(a + \frac{r}{4} \right)^2 \sin^2 \varphi + \left(a + \frac{r}{2} \right)^2 \cos^2 \varphi} \right].$$

On voit clairement, dans cette formule, les influences séparées de la dilatation ou contraction longitudinale du fil, de sa flexion, du glissement latéral de ses parties et de sa torsion.

° Je pense qu'elle servirait très-utilement, au moyen d'expériences sur les pièces en hélice, à déterminer la grandeur des quantités R_0 , sur lesquelles on n'a, jusqu'à présent, que des données vagues.

§ V. — *Détermination des déplacements des points des pièces solides du des changements de forme qu'elles éprouvent.*

° 15. Soient, avec les notations des nos 2 et 3,
 x, y, z les coordonnées du point M de l'axe de la pièce;
 ds l'élément de cet axe;
 ρ son rayon de courbure;
 e l'angle que fait, sur la section ω , le prolongement
 de ce rayon avec l'axe principal des y ;
 $\frac{ds}{\tau}$ l'angle des deux plans osculateurs voisins,
 ∂ la caractéristique des variations par déplacement

avant
les
déplacements.

$$\xi = \partial x, \quad \eta = \partial y, \quad \zeta = \partial z, \quad \varepsilon = \partial e,$$

$$X = dy d^2 z - dz d^2 y, \quad Y = dz d^2 x - dx d^2 z, \quad Z = dx d^2 y - dy d^2 x.$$

° J'ai trouvé (je me borne, dans cet extrait, au cas où π_u et π_v sont négligeables):

$$\partial = \frac{\partial ds}{\partial s} + (u \sin e + v \cos e) \frac{1}{ds} \frac{\partial ds}{\partial \rho} + (u \cos e - v \sin e) \frac{1}{\rho} + u \frac{d\xi_s}{ds} + v \frac{d\zeta_s}{ds} - w \frac{d\gamma}{ds},$$

$$\partial = \frac{ds}{ds} + \frac{1}{ds} \partial \frac{ds}{\tau}.$$

Le dernier terme de ∂ est l'influence du *gauchissement* sur la *dilatation*. Il ne donnera que des composantes nulles, et des moments ordinairement nuls et toujours petits, ce qui motive pourquoi nous l'avons négligé au n° 2 et le

négligeons encore. Les équations (5) deviennent

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{M_u}{E_\mu} = \frac{\cos e}{ds} \cdot \partial \frac{ds}{\rho} - \sin e \frac{s}{\rho} + \frac{dg_s^s}{ds}, \quad \frac{M_l}{E_\mu} = \frac{\sin e}{ds} \cdot \partial \frac{ds}{\rho} + \cos e \frac{s}{\rho} + \frac{dg_s^s}{ds}, \\ \frac{P_l}{E_\omega} = \frac{\partial ds}{ds}, \quad \frac{M_l}{G \frac{4\mu\mu'}{\mu + \mu'}} = \frac{ds}{ds} + \frac{1}{ds} \partial \frac{ds}{\tau}; \quad G_o = \frac{P_u}{G_\omega}, \quad G_v = \frac{P_v}{G_\omega}. \end{array} \right.$$

On en tire, en éliminant G_o , G_v , ϵ ,

$$(15) \quad \frac{\partial ds}{ds} = D, \quad \frac{1}{ds} \partial \frac{ds}{\rho} = F \frac{ds}{ds} \partial \frac{ds}{\tau} = T,$$

D, F, T étant des polynômes que je me dispense d'écrire, et où tout est connu, si ξ, η, ζ sont assez petits pour ne pas influencer sensiblement sur les composantes et les bras de levier des forces (*).

Les premiers membres étant développés, en différentiant par ∂ les expressions connues de ds , $\frac{ds}{\rho}$ et $\frac{ds}{\tau}$ en x, y, z , et remplaçant $\partial x, \partial y, \partial z$ par ξ, η, ζ , on aura entre ces déplacements trois équations différentielles du premier, du deuxième et du troisième ordre, que je n'écris pas, car elles contiennent un grand nombre de termes. Qu'il me suffise de dire que j'ai pu les intégrer; ce qui m'a donné

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} d\xi = D dx - dy \int (T dz + \frac{\rho Z}{ds^2} F) + dz \int (T dy + \frac{\rho Y}{ds^2} F), \\ d\eta = D dy - dz \int (T dx + \frac{\rho X}{ds^2} F) + dx \int (T dz + \frac{\rho Z}{ds^2} F), \\ d\zeta = D dz - dx \int (T dy + \frac{\rho Y}{ds^2} F) + dy \int (T dx + \frac{\rho X}{ds^2} F). \end{array} \right.$$

17. On peut s'étonner de voir, dans mes équations, une certaine quantité toute nouvelle ϵ , dont personne n'a encore tenu compte, et qui s'y trouve en quelque sorte sur le même pied que les angles de contingence et d'osculation plane $\frac{ds}{\rho}$ et $\frac{ds}{\tau}$. Un exemple montrera facilement, je pense, que ce déplacement angulaire du rayon de courbure sur la section devait entrer nécessairement dans notre analyse.

(*) Dans le cas contraire, on aurait les mêmes équations différentielles; mais les seconds membres contiendraient ξ, η, ζ , et il n'y aurait de plus que la difficulté de l'intégration.

» Qu'on se figure une verge élastique à double courbure serrée de toutes parts dans un canal fixe et rigide, mais où on puisse la faire tourner sur elle-même, car on suppose sa section circulaire ainsi que celle du canal. Dans ce mouvement, les fibres les plus longues se seront forcément raccourcies, les plus courtes se seront allongées, et il y aura eu aussi des torsions si les rotations imprimées à toutes les sections n'ont pas été les mêmes : l'élasticité de la pièce aura résisté énergiquement, dans tous les cas, à de pareils déplacements de ses points.

» Cependant, ni les rayons de courbure, ni les plans osculateurs de l'axe n'auront changé en aucune manière.

» Donc, les résistances dites à la flexion et à la torsion ne dépendent pas uniquement du changement des angles de contingence, et de ces angles que forment les plans osculateurs entre eux : elles dépendent, au même degré, d'autre chose, savoir, du genre de déplacement qui a eu lieu dans l'exemple cité ; or c'est précisément, sur chaque section, ce déplacement angulaire que j'ai appelé ϵ .

» On voit donc que l'on chercherait vainement la solution du problème des changements de forme des pièces élastiques à double courbure en se bornant à considérer les points de leur axe. Il faut s'inquiéter aussi de ce qui se passe hors de l'axe. Cette observation explique, ce me semble, une erreur de Lagrange que Poisson n'a pas évitée (*Mécan.*, 2^e éd., n^{os} 317, 318), quoiqu'elle eût été signalée par M. Binet dès 1814.

§ VI. — Conditions aux limites. Méthode générale pour arriver à la détermination des réactions et actions mutuelles inconnues, dans un système quelconque de pièces solides.

18. Cette méthode consiste à chercher les déplacements des points des pièces, en laissant sous forme indéterminée les grandeurs, les bras de levier et les directions des forces dont nous parlons. Une fois les déplacements exprimés en fonctions de ces quantités cherchées, on pose les conditions définies qu'ils doivent remplir aux points d'appui ou d'encastrement, ou aux jonctions des diverses pièces, ou aux points de raccordement des diverses parties dans lesquelles il faut diviser une même pièce parce que les déplacements y sont exprimés par des équations différentes. De cette manière, on arrive à avoir autant d'équations que d'inconnues, car il n'y a, dans les questions de mécanique physique, évidemment aucune indétermination.

» Mais ces forces inconnues sont quelquefois en nombre indéfini : telles sont les réactions des parois des encastrements, ou les actions mutuelles de pièces qui se touchent sur une portion de leur surface ; telles sont encore les

actions d'autres parties d'une même pièce qu'il faut quelquefois traiter ainsi, par exemple dans le cas singulier de la flexion d'un anneau ou d'un ressort dynamométrique fermé. Comment faire entrer toutes ces petites forces dans le calcul? J'ai donné pour cela, en 1837, un moyen qui n'a rien d'arbitraire et qui m'a toujours réussi. Soient p_x, p_y, p_z les composantes, parallèles aux axes, d'une de ces petites forces, a, b, c les coordonnées de son point d'application; son moment autour d'une droite parallèle aux x menée par le point de l'axe de la pièce dont les coordonnées sont x, y, z , sera $(b - y) p_x - (c - z) p_y$. Mais on n'a besoin que des sommes de moments et de composantes parallèles aux trois coordonnées; soient donc A_x, A_y, A_z ces dernières sommes, on aura pour celles de moments :

$$B_x + A_y z - A_z y, \quad B_y + A_z x - A_x z, \quad B_z + A_x y - A_y x;$$

d'où il suit que tout ce qu'il est nécessaire de savoir sur ces forces, quel qu'en soit le nombre, s'exprimera pour chaque partie des pièces par six indéterminées au plus.

La division des pièces en plusieurs parties dispense tout à fait de se servir de ces formules transcendantes de discontinuité dont Poisson a fait usage (*Mécan.*, n° 324). Il faudra seulement raccorder les axes des parties d'une même pièce par une tangente commune, ou plutôt par les petits angles $g' = \frac{P_x}{G_w}$, $g'' = \frac{P_y}{G_w}$ que produira le glissement. Il faudra aussi, dans les pièces à double courbure, donner, aux limites, la valeur convenable au déplacement angulaire

$$\varepsilon = -\rho \left(\frac{M_x}{E\mu} - \frac{d}{ds} \frac{P_x}{G_w} \right) \sin e + \rho \left(\frac{M_y}{E\mu} - \frac{d}{ds} \frac{P_y}{G_w} \right) \cos e.$$

On posera, tantôt que ce déplacement est nul, ce qui convient aux extrémités libres, tantôt qu'il est tel que les axes principaux de la section sont restés immobiles, ce qui est le cas des encastrements, et ainsi des autres. »

*Intégration d'une équation différentielle qui se présente dans
la théorie de la flexion des verges élastiques,*

PAR M. DE SAINT-VENANT.

(Extrait du *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, tome IX, 1854.)

Dans la théorie de la flexion des verges élastiques à double courbure sollicitées par des forces quelconques, on obtient trois équations [*] :

$$(1) \quad \frac{\partial ds}{\partial s} = D, \quad \frac{1}{ds} \frac{\partial}{\partial s} \frac{ds}{\rho} = F, \quad \frac{1}{ds} \frac{\partial}{\partial s} \frac{ds}{\tau} = T,$$

dans lesquelles D, F, T représentent des fonctions connues des coordonnées primitives x, y, z d'un point quelconque m de l'axe courbe de la pièce, s la longueur de l'arc de cet axe jusqu'au point m , $\frac{ds}{\rho}$ et $\frac{ds}{\tau}$ l'angle de contingence et l'angle de deux plans osculateurs consécutifs de la même courbe à ce point; enfin ∂ la caractéristique des variations provenant des déplacements très-petits des points de l'axe, déterminés par l'action des forces données, dont les composantes et les moments entrent dans D, F, T .

Ce sont ces déplacements $\xi = \partial x, \eta = \partial y, \zeta = \partial z$, estimés parallèlement aux x, y, z , qu'il s'agit de trouver.

Pour cela, effectuons les différentiations par ∂ des premiers membres des équations précédentes; après avoir remplacé $ds, \frac{ds}{\rho}, \frac{ds}{\tau}$ par leurs expressions générales connues en x, y, z , nous aurons trois équations différentielles simultanées du premier, du deuxième et du troisième ordre en ξ, η, ζ . Si nous éliminons deux de ces inconnues, par exemple η et ζ (ce qui se fait facilement en différentiant la première équation et en en tirant les valeurs de $d^2\eta, d^2\zeta$, d'où, à l'aide de la seconde équation, celles de $d\eta$ et $d\zeta$ que l'on substitue dans la troisième), les intégrales disparaissent et nous obtenons une équation en ξ ,

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} d\xi d^2y d^2z - d\xi d^2z d^2y + dy d^2z d^2\xi - dy d^2\xi d^2z \\ + dz d^2\xi d^2y - dz d^2y d^2\xi = S ds^3, \end{aligned} \right.$$

[*] *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, tome XVII, page 952.

dans laquelle S représente une certaine fonction connue (comme D , F , T) des coordonnées primitives du point m , ou de l'arc s que l'on peut prendre pour variable indépendante.

Si l'on remplace, dans le premier membre, y et z par leurs valeurs en s , tirées des équations de la courbe primitive de l'axe, ou n'a plus, dans l'équation précédente, que ξ et s . Cette équation différentielle du troisième ordre est linéaire; mais les coefficients de $\frac{d\xi}{ds}$, $\frac{d^2\xi}{ds^2}$, $\frac{d^3\xi}{ds^3}$ n'y sont point constants, et il n'existe pas de méthode générale pour résoudre, par rapport à ξ , une équation de ce genre.

Aussi j'ai cherché à intégrer directement l'équation (2) sans particulariser son second membre. J'y ai réussi en posant

$$d\xi = u dz, \quad dy = v dz.$$

La substitution dans les six termes du premier membre en produit vingt-deux, mais il y en a vingt qui s'entre-détruisent, et ce premier membre se réduit à

$$dz^2 (du d^2v - dv d^2u) = - dz^2 dv^3 d \frac{du}{dv}.$$

Donc on a

$$- dz^2 \left(d \frac{dy}{dz} \right)' d \frac{d \frac{d\xi}{dz}}{d \frac{dy}{dz}} = S ds^4,$$

équation qui est intégrable; on en tire

$$\frac{d\xi}{dz} = - \int \left(d \frac{dy}{dz} \right) \int \frac{S ds^4}{ds^3 \left(d \frac{dy}{dz} \right)^2};$$

et l'on fait disparaître l'intégrale double en intégrant par parties, ce qui donne

$$d\xi = dz \int \frac{S ds^4}{(dy d^2z - dz d^2y)^2} dy - dy \int \frac{S ds^4}{(dy d^2z - dz d^2y)^2} dz.$$

On aurait des expressions analogues pour $d\eta$, $d\zeta$:

La recherche des petits déplacements des points de l'axe d'une pièce courbe à double courbure est ainsi ramenée aux quadratures, et l'on voit que le polynôme différentiel qui forme le premier membre de l'équation (2) est intégrable quand, après l'avoir multiplié par dz ou dy , on le divise par $(dy d^2z - dz d^2y)^2$.

INSTITUT DE FRANCE.

ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES.

(Extrait des Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, séance du 6 novembre 1843.)

SUITE AU MÉMOIRE

3^e série.

Lu le 30 octobre 1843, sur le calcul de la résistance et de la flexion des pièces solides à simple ou à double courbure, en prenant simultanément en considération les divers efforts auxquels elles peuvent être soumises dans tous les sens;

PAR M. BARRÉ DE SAINT-VENANT.

(EXTRAIT.)

§ VII. — Applications des formules générales des § V et VI.

« 19. Le Mémoire du 30 octobre se composait de deux parties; j'ai donné (§ IV) divers exemples de l'application de la première partie, relative aux conditions de résistance, et j'ai montré les différences souvent considérables qu'offrent les résultats des formules nouvelles avec ceux des formules de l'ancienne théorie qui néglige plusieurs éléments.

« Aujourd'hui je donne des applications de la seconde partie (§ V et VI), relative au calcul des déplacements des points des pièces, ainsi qu'à la détermination des réactions et autres forces inconnues que la statique abstraite laisserait indéterminées. On remarquera encore (nos 22, 23, 24) des différences très-fortes entre mes résultats et ceux des formules connues.

« 20. Conservons les notations du n° 15 du Mémoire du 30 octobre; substituons pour D, F, T, dans les équations (16), les valeurs que l'on tire pour $\frac{\partial ds}{\partial x}$, $\frac{1}{\partial x} \frac{\partial ds}{\partial y}$ et $\frac{1}{\partial x} \frac{\partial ds}{\partial z}$ des équations (14); intégrons par parties les termes

affectés de ds ; ceux sous le signe f qui resteront affectés de ϵ représenteront les moments des forces autour du rayon de courbure prolongé, car on a

$$(17) \quad \epsilon = \rho \left(\frac{M_x}{E\mu^2} - \frac{d}{ds} \frac{P_x}{G\omega} \right) \cos e - \rho \left(\frac{M_u}{E\mu} - \frac{d}{ds} \frac{P_x}{G\omega} \right) \sin e,$$

et $-\rho \frac{d}{ds} \left(\frac{dx}{ds} \right)$, $-\rho \frac{d}{ds} \left(\frac{dy}{ds} \right)$, $-\rho \frac{d}{ds} \left(\frac{dz}{ds} \right)$ sont les cosinus des angles faits avec les axes coordonnés par ce prolongement du rayon de courbure. Donc, si l'on remarque que $\frac{\rho X}{ds^2}$, $\frac{\rho Y}{ds^2}$, $\frac{\rho Z}{ds^2}$ sont les cosinus des angles faits de même par la perpendiculaire au plan osculateur, et si l'on appelle

" α_u , ξ_u , γ_u les angles formés avec les x , les y , les z par l'axe principal Mu de la section;

" α_v , ξ_v , γ_v les angles formés de même par l'axe principal Mv ,
les équations (16) prendront cette forme :

$$(18) \quad \begin{cases} d\xi = \frac{P_t}{E\omega} dx + \mathcal{T} dz - \mathcal{Z} dy, & d\eta = \frac{P_t}{E\omega} dy + \mathcal{Z} dx - \mathcal{X} dz, \\ d\zeta = \frac{P_t}{E\omega} dz + \mathcal{X} dy - \mathcal{T} dx, \end{cases}$$

en faisant

$$(19) \quad \frac{4\mu\mu'}{\mu + \mu'} = 2\mu'',$$

et

$$(20) \quad \begin{cases} \int \left[\frac{M_t}{2G\mu''} \frac{dx}{ds} + \left(\frac{M_u}{E\mu} - \frac{d}{ds} \frac{P_x}{G\omega} \right) \cos \alpha_u - \left(\frac{M_v}{E\mu'} - \frac{d}{ds} \frac{P_x}{G\omega} \right) \cos \alpha_v \right] ds = \mathcal{X}, \\ \int \left[\frac{M_t}{2G\mu''} \frac{dy}{ds} + \left(\frac{M_u}{E\mu} - \frac{d}{ds} \frac{P_x}{G\omega} \right) \cos \xi_u - \left(\frac{M_v}{E\mu'} - \frac{d}{ds} \frac{P_x}{G\omega} \right) \cos \xi_v \right] ds = \mathcal{T}, \\ \int \left[\frac{M_t}{2G\mu''} \frac{dz}{ds} + \left(\frac{M_u}{E\mu} - \frac{d}{ds} \frac{P_x}{G\omega} \right) \cos \gamma_u - \left(\frac{M_v}{E\mu'} - \frac{d}{ds} \frac{P_x}{G\omega} \right) \cos \gamma_v \right] ds = \mathcal{Z}. \end{cases}$$

" Ces formules, qui ramènent aux quadratures la recherche des petits déplacements, seront faciles à appliquer dans tous les cas particuliers. On choisira toujours, sur chaque section, les demi-axes principaux des u , v positifs, de manière que le prolongement du rayon de courbure passe dans leur angle. Une remarque servira encore à éviter les erreurs de signe; outre qu'elle donne une vérification de nos formules, c'est que les divers termes qui entrent dans la composition des quantités désignées par $\mathcal{X}$, $\mathcal{T}$, $\mathcal{Z}$ repré-

sentent de petites rotations des éléments de l'axe de la pièce autour des x, y, z , en vertu de l'action des forces.

21. Appliquons-les d'abord au cas général où la courbe d'axe de la pièce est plane et reste dans le même plan en changeant de forme. Il faut, pour cela, si x et y sont les coordonnées dans son plan, que l'on ait

$$M_z = 0, \quad M_y = 0, \quad P_u = 0, \quad \cos \alpha_u = 0, \quad \cos \xi_u = 0.$$

Il en résulte

$$\cos \gamma_u = 1, \quad \cos \alpha_v = -\frac{dy}{ds}, \quad \cos \xi_v = \frac{dx}{ds}, \quad \cos \gamma_v = 0,$$

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = -\frac{P_v}{G_w} + \int \frac{M_s}{E_p} ds;$$

d'où

$$(21) \quad \begin{cases} d\xi = \frac{P_t}{E_w} dx + \frac{P_v}{G_w} dy - dy \int \frac{M_s}{E_p} ds, \\ d\eta = \frac{P_t}{E_w} dy - \frac{P_v}{G_w} dx + dx \int \frac{M_s}{E_p} ds. \end{cases}$$

Je suis arrivé à ces dernières formules, en 1837, par d'autres considérations (*). Si on les réduit à leurs derniers termes, $-dy \int \frac{M_s}{E_p} ds, dx \int \frac{M_s}{E_p} ds$ on a celles qui ont été données pour la première fois par M. Navier (2^e édit., n° 447) pour les petites flexions des pièces courbes planes.

Passons aux applications plus particulières.

22. *Pièce rectangulaire encastrée par un bout et sollicitée à l'autre par une force P perpendiculaire à sa longueur a et au côté b de sa base.*— Soient c l'autre côté et x la distance de l'encastrement à un point quelconque de l'axe de la pièce; les formules (21) donneront, eu égard à ce que, pour $x = 0$, on doit avoir $\frac{d\eta}{dx} = \xi_0 = \frac{P}{G_w}$,

$$d\xi = 0, \quad d\eta = \frac{P}{G_w} dx + dx \frac{P \left(ax - \frac{x^2}{2} \right)}{E_p};$$

d'où

$$\eta = \frac{Px}{G_w} + \frac{P}{E_p} \left(a \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right).$$

(*) Voir les feuilles lithographiées de mon Cours, offertes à l'Académie en 1838.

La flèche de courbure, ou la valeur de η pour $x = a$, sera, en mettant pour ω , μ , G , leurs valeurs bc , $\frac{1}{12}bc^3$, $\frac{2}{3}E$,

$$f = \frac{4}{3} \frac{Pa^3}{Ebc^3} \left(1 + \frac{c^2}{a^2} \right).$$

On voit ainsi que le glissement n'influe beaucoup sur la courbure que pour les pièces courtes.

» Mais, dans ces pièces, il a une influence beaucoup plus considérable sur la flèche de courbure que sur les *conditions de résistance* (n° 8); car la proportion de cette influence est mesurée par $\frac{c^2}{a^2}$; en sorte qu'elle est,

$$\begin{array}{ll} \text{pour } c = 3a, & 0,07 \quad \text{ou} \quad 7 \text{ pour } 100; \\ c = 2a, & 16 \text{ pour } 100; \\ c = a, & 62 \text{ pour } 100. \end{array}$$

Il convenait donc d'avoir un moyen de faire entrer le glissement dans le calcul des flexions comme dans celui des conditions de résistance.

» 25. *Même pièce lorsque la force P qui la sollicite est oblique aux côtés de la base (supposés inégaux).* — Alors, ainsi qu'on l'a vu au Mémoire du 30 octobre, la pièce ne saurait fléchir dans le plan où elle est sollicitée à le faire. Les formules (18), (20) apprennent dans quel sens aura lieu sa flexion; elles donnent, en appelant φ l'angle que fait la force avec le côté c :

$$d\eta = \omega dx = dx \int \frac{P \sin \varphi (a-x)}{E\mu'} dx,$$

$$d\zeta = -\mathcal{T} dx = dx \int \frac{P \cos \varphi (a-x)}{E\mu} dx.$$

Intégrant de manière que pour $x = 0$ on ait

$$\eta = 0, \quad \zeta = 0, \quad \frac{d\eta}{dx} = -g'_0 = -\frac{P}{G_{\omega}}, \quad \frac{d\zeta}{dx} = -g''_0 = -\frac{P}{G_{\omega}},$$

on obtient

$$\eta = \frac{P \sin \varphi}{G_{\omega}} x + \frac{P \sin \varphi}{E\mu'} \left(a \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right), \quad \zeta = \frac{P \cos \varphi}{G_{\omega}} x + \frac{P \cos \varphi}{E\mu} \left(a \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right);$$

ce qui donne pour les projections dans les deux sens de la flèche de courbure f , pour cette flèche elle-même, et pour l'angle ψ qu'elle fait avec l'axe des x , pa-

rallele au côté c :

$$f_y = \frac{4P a' \sin \varphi}{E b' c}, f_z = \frac{4P a' \cos \varphi}{E b c'}, f = \frac{4P a'}{E b c} \sqrt{\frac{\sin^2 \varphi}{b'^2} + \frac{\cos^2 \varphi}{c'^2}}, \tan \psi = \frac{c'}{b'} \tan \varphi.$$

* L'ancienne théorie ne prenait qu'un seul moment autour d'une droite perpendiculaire à P , et passait sous silence l'autre moment qui n'est cependant pas nul pour les forces intérieures, ce qui donnait ces résultats erronés :

$$f = \frac{4Pa'}{E b c (\delta' \sin^2 \varphi + c' \cos^2 \varphi)} \quad \text{et} \quad \tan \psi = \tan \varphi.$$

Le rapport des tangentes des angles ψ données par la formule nouvelle et par la formule ancienne est, comme l'on voit, $\frac{c'}{b'}$, on 1,44, 2, 4 et 9 quand le rapport $\frac{c}{b}$ des deux côtés est successivement 1,2, 1,41, 2 et 3, ce qui fait, comme l'on voit, des différences considérables.

* On voit aussi que, dans le cas où par exemple $\varphi = \frac{1}{4}\pi = 45$ degrés, le rapport de la flèche réelle à la flèche donnée par l'ancienne théorie est 1,185, 1,825, 3,56, le rapport des côtés étant successivement 1,41, 2 et 3.

* 24. *Pièce horizontale encastrée* (voyez n° 22), le poids P étant distribué uniformément sur sa longueur. Influence de la pression latérale des fibres. — Cette pression, que j'ai désignée par π_u aux nos 3 et 9, a pour valeur $\frac{P}{ab}$ sur une des faces, et zéro sur la face opposée; supposons qu'elle varie

à peu près proportionnellement à l'ordonnée v , on aura $\pi_u = \frac{P}{2ab} + \frac{P}{ab c} v$; il faudra ajouter $\frac{P}{ab c}$ à $\frac{M_u}{E\mu}$ dans les formules ci-dessus. Donc on a pour la flèche de courbure :

$$f = \frac{2 a^2 P}{E b c^3} \left(1 + \frac{5}{8} \frac{c'}{a'} + \frac{c^2}{2 a'^2} \right).$$

Le terme $\frac{5}{8} \frac{c'}{a'}$ est l'influence du glissement, et le terme $\frac{c^2}{2 a'^2}$ l'influence de la pression latérale. On voit que ces deux causes produisent des effets à peu près égaux.

* 25. *Anneau circulaire, posé verticalement, et fléchi dans son plan par un poids $2P$ placé sur son sommet.* — Nous ne pouvons considérer, comme à l'ordinaire, les forces extérieures qui agissent sur la pièce depuis

un point déterminé jusqu'à l'une des extrémités, car la pièce est *sans fin*. Il faut donc se borner à une portion de la pièce, par exemple, à un quart de cercle compté à partir de son sommet, et reconstruire à la méthode du § VI pour exprimer le moment inconnu des réactions de la partie inférieure de l'anneau.

» Soient donc $B_x + Px$ le moment total, autour d'un point M du quart d'anneau, de ces forces dont la résultante est $-P$;

» a le rayon de l'anneau;

» t l'angle formé par le rayon mené au point M et par le diamètre vertical;

» $x = a \sin t$, $y = a \cos t$ les coordonnées de M par rapport à la tangente au sommet et au même diamètre.

» On aura, en négligeant l'influence du glissement et celle de la contraction longitudinale, qui ne sont sensibles que lorsque l'épaisseur de l'anneau est considérable,

$$d\xi = -\frac{a \sin t \, dt}{E\mu} \int (B_x + Pa \sin t) \, adt, \quad d\eta = \frac{a \cos t \, dt}{E\mu} \int (B_x + Pa \sin t) \, adt.$$

L'intégrale $B_x at - Pa^2 \cos t + \text{const.}$ doit s'anéantir pour $t = 0$ et $t = \frac{1}{2}\pi$, car $\frac{d\xi}{dt}$ doit être nul au sommet, et $\frac{d\xi}{dt}$ à l'extrémité du diamètre horizontal. Ces deux conditions aux limites donnent

$$\text{const.} = Pa^2, \quad B_x = -\frac{2}{\pi} Pa.$$

Substituant et intégrant de nouveau, on trouve des expressions générales des déplacements ξ, η dont il résulte, pour l'élargissement horizontal et pour l'aplatissement vertical de l'anneau,

$$\text{élargissement} = \frac{Pa^2}{E\mu} \left(\frac{4}{\pi} - 1 \right), \quad \text{aplatissement} = \frac{Pa^2}{E\mu} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \right).$$

Le premier est les 0,82, et le second les 0,89 de la flèche de courbure d'une pièce droite encastree, d'une longueur égale au rayon, sollicitée perpendiculairement par le même poids P.

» On calculerait de la même manière la flexion d'un ressort de dynamomètre fermé et sans articulation, comme celui de Régnier.

» 26. Anneau horizontal, cambré par des forces verticales. — Soit a le

rayon de cet anneau; supposons qu'il soit posé sur deux appuis aux extrémités A, A' de l'un de ses diamètres, et sollicité par deux poids P aux extrémités B, B' d'un autre diamètre perpendiculaire au premier.

° Soient x, y les coordonnées, parallèlement à ces deux diamètres, d'un point M du quart d'anneau AB;

° t l'angle du rayon en M avec le diamètre A'A.

° Les moments, autour de parallèles aux x et aux y menées par le point M, des réactions inconnues de la partie de l'anneau au delà du point B, seront (§ VI) exprimées par

$$aB_x + Py, \quad aB_y - Px.$$

° Donc, si l'on prend pour axe des u le prolongement du rayon, on a, comme $x = a \cos t$, $y = a \sin t$,

$$M_t = -aB_x \sin t + aB_y \cos t - Pa, \quad M_u = aB_x \cos t + aB_y \sin t;$$

d'où

$$\xi = 0, \quad \eta = 0,$$

et, en négligeant le glissement,

$$(22) \left\{ \begin{aligned} \zeta &= a^3 C'' + \frac{a^3}{2G\mu^2} \left[B_x \left(\frac{t \sin t}{2} + \cos t \right) + B_y \left(\frac{\sin t}{2} - \frac{t \cos t}{2} \right) - Pt \right] \\ &\quad + \frac{a^3}{E\mu} \left[B_x \frac{t \sin t}{2} + B_y \left(\frac{\sin t}{2} - \frac{t \cos t}{2} \right) \right] + Ca^3 \sin t - C'a^3 \cos t. \end{aligned} \right.$$

° Les cinq constantes B_x, B_y, C, C', C'' auront des valeurs différentes, suivant les circonstances où l'on supposera placées les extrémités A, B du quart d'anneau que nous considérons.

° 1°. S'il y avait encastrement en A, et fente de l'anneau ou liberté complète en B, on aurait

$$\text{Pour } t = \frac{1}{2}\pi: M_t = 0, \quad M_u = 0; \quad \text{et pour } t = 0: \zeta = 0, \quad \frac{d\zeta}{dt} = 0.$$

° Mais il faut une cinquième équation de condition; ce sera celle qui exprimera l'immobilité des points de la section au point d'encastrement A. Pour la poser, il faut recourir à la considération du déplacement angulaire ϵ du rayon de courbure sur cette section. Son expression générale (17) se réduit,

pour notre anneau, à

$$\varepsilon = -\frac{Pa^2}{E\mu} (B_x \cos t + B_y \sin t),$$

ou à $\frac{Pa^2}{E\mu}$ au point A, puisque les deux premières équations de condition donnent

$$B_x = -P, \quad B_y = 0.$$

Il faut donc exprimer que le rayon de courbure, après les déplacements, fait l'angle $\frac{Pa^2}{E\mu}$ avec sa direction primitive, c'est-à-dire avec l'axe des x . Or les cosinus des angles du rayon de courbure avec les x, y, z , avant les déplacements des points d'une courbe quelconque, sont exprimés (quand la différentielle ds de l'arc est constante, ce que nous avons supposé presque toujours) par

$$\frac{d^2x}{\sqrt{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2}}, \quad \frac{d^2y}{\sqrt{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2}}, \quad \frac{d^2z}{\sqrt{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2}}.$$

Ils ont, après les déplacements, des valeurs de même forme, mais en mettant

$$d^2x + d^2\xi, \quad d^2y + d^2\eta, \quad d^2z + d^2\zeta,$$

au lieu de d^2x, d^2y, d^2z . On tirera de là, pour la cinquième équation de condition,

$$\frac{d\zeta}{dt} = -\frac{Pa^2}{E\mu}, \quad \text{pour } t = 0;$$

d'où, pour les cinq constantes,

$$B_x = -P, \quad B_y = 0, \quad C = C' = \frac{1}{2G\mu}, \quad C'' = 0,$$

et par suite

$$\zeta = -\frac{Pa^2}{2G\mu} (t - 1 + \cos t - \sin t + \frac{1}{2}t \sin t) - \frac{Pa^2}{E\mu} \cdot \frac{1}{2}t \sin t.$$

La flèche verticale au point de suspension B est

$$\frac{Pa^2}{2G\mu} \left(\frac{3}{4}\pi - 2 \right) + \frac{Pa^2}{E\mu} \cdot \frac{1}{4}\pi.$$

On voit quelles sont les quote-parts de la flexion ordinaire et de la torsion dans sa grandeur.

2°. Supposons que l'anneau ne soit que posé en A, mais qu'il ne soit

pas fendu en B, et c'est là le cas le plus ordinaire de l'anneau. On aura la même chose que si le quart d'anneau AB était engagé à ces deux extrémités dans des étuis horizontaux où il pût tourner librement sur lui-même : on aura, pour les cinq conditions,

$$\text{Pour } t = \frac{1}{2}\pi: \quad M_t = 0, \quad \frac{d\zeta}{dt} = 0;$$

$$\text{Pour } t = 0: \quad M_t = 0, \quad \zeta = 0, \quad \frac{d\zeta}{dt} = 0.$$

» Déterminant les constantes en conséquence, on a, en substituant,

$$\zeta = -\frac{Pa^2}{2G\mu^2}(t + 2\cos t - \sin t + t\sin t - 2) \\ - \frac{Pa^2}{E\mu}\left(\frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{2}t\sin t + \frac{1}{2}t\cos t - \frac{1}{4}\pi\cos t + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right).$$

La flèche de courbure au point de suspension sera

$$\frac{Pa^2}{2G\mu^2}(\pi - 3) + \frac{Pa^2}{E\mu}\left(\frac{1}{2}\pi - 1\right), \quad \text{ou} \quad \frac{Pa^2}{E\mu}\left(\frac{7}{4}\pi - \frac{11}{4}\right),$$

quand $\mu = \mu''$, $G = \frac{3}{8}E$.

» 3°. Si l'anneau était encastré ou pincé horizontalement en A, sa section étant toujours libre de tourner sur elle-même en B, on aurait

$$\text{Pour } t = 0: \quad \zeta = 0, \quad \frac{d\zeta}{dt} = 0, \quad \frac{d^2\zeta}{dt^2} = -\frac{Pa^2}{E\mu}.$$

$$\text{Pour } t = \frac{1}{2}\pi: \quad \frac{d\zeta}{dt} = 0, \quad M_t = 0.$$

» 4°. S'il était aussi pincé horizontalement en B, sans que cela empêchât ce point de descendre, on aurait, en égard à la valeur de ϵ qui est nulle en B, $\frac{d^2\zeta}{dt^2} = 0$ pour $t = \frac{1}{2}\pi$, au lieu de la cinquième condition du cas précédent.

» Nous ne développerons pas ici le calcul relatif à ces deux derniers cas de l'anneau. Il nous suffit de l'avoir pris pour exemple de la manière dont on exprimera, en général, les conditions aux limites des pièces.

» 27. *Résistance à la rupture ou à l'altération de leur élasticité, des anneaux circulaires des nos 25 et 26.* — Les équations de cette résistance peuvent être posées facilement, conformément au § III, maintenant que la

considération des déplacements nous a conduits, ainsi qu'il a été dit au § VI, à la détermination des moments des forces inconnues.

28. *Ressort en hélice sollicité dans le sens de sa longueur.* — Soient

a le rayon du cylindre sur lequel l'axe hélicoïdal du ressort est enroulé;

P la force, suivant l'axe du cylindre supposé vertical;

φ l'angle constant de l'hélice avec l'horizon avant son extension ou sa compression.

• Prenons l'axe du cylindre pour axe des z ; appelons t l'angle formé avec le plan des xz par le rayon mené au point M , dont les coordonnées sont x, y, z , et regardons cet angle comme croissant de 2π à chaque spire. Prenons pour axe des v sur la section, le prolongement du rayon, nous aurons

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = a \tan \varphi;$$

$$\cos \alpha_u = \sin \varphi \sin t, \quad \cos \xi_u = -\sin \varphi \cos t, \quad \cos \gamma_u = \cos \varphi,$$

$$\cos \alpha_v = \cos t, \quad \cos \xi_v = \sin t, \quad \cos \gamma_v = 0;$$

$$P_t = 0, \quad P_v = P \cos \varphi, \quad P_r = 0, \quad M_u = -Pa \sin \varphi, \quad M_v = 0, \quad M_t = Pa \cos \varphi;$$

d'où, en appelant α le raccourcissement — $\partial a = -\xi \cos t - \eta \sin t$ éprouvé par le rayon du cylindre, et C, C', C'', C''', C'' des constantes,

$$\zeta = C'' + \frac{Pa \sin \varphi \tan \varphi}{E_{\omega}} t + \frac{Pa^2}{\cos \varphi} \left(\frac{\cos^2 \varphi}{2 G \mu^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{E_{\mu}} \right) [t + C \sin t + C' (1 - \cos t)];$$

$$\alpha = -\frac{Pa \sin \varphi}{E_{\omega}} + Pa^2 \sin \varphi \left(\frac{1}{2 G \mu^2} - \frac{1}{E_{\mu}} \right) + \frac{Pa^2 \tan \varphi}{\cos \varphi} \left(\frac{\cos^2 \varphi}{2 G \mu^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{E_{\mu}} \right) [1 + Ct \sin t + C't(1 - \cos t)] + C'' \cos t + C''' \sin t.$$

• Les cinq constantes dépendront des conditions variées qui peuvent être imposées aux extrémités du ressort. Celle C'' est nulle en supposant $\zeta = 0$ pour $t = 0$; les cinq autres n'affectent que des quantités périodiques qui s'annulent à des points déterminés de chaque spire. Si donc les points d'attache sont disposés de manière que l'hélice ne perde rien de sa régularité en s'étendant, tous les termes où entrent ces constantes doivent être supprimés, et l'on voit, 1° que l'allongement ζ est proportionnel à la longueur du ressort; 2° que son rétrécissement est constant. Et ces deux lois s'observeront toujours par approximation à une certaine distance des points d'attache, quels qu'ils soient.

• On voit que le glissement, qui influe, comme nous avons vu, sur les

conditions de résistance du ressort à cause de l'inclinaison des sections sur l'axe hélicoïdal, n'a aucune influence sur les déplacements des points de cet axe. La dilatation longitudinale n'a généralement qu'une faible influence, en sorte qu'on peut supprimer les termes divisés par $E\omega$. Il reste

$$\zeta = \frac{Pa^2}{\cos \varphi} \left(\frac{\cos^2 \varphi}{2G\mu^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{E\mu} \right) l$$

$$\alpha = \zeta \tan \varphi + Pa^2 \sin \varphi \left(\frac{1}{2G\mu^2} - \frac{1}{E\mu} \right).$$

Le second terme de cette expression du demi-rétrécissement α vient de ce que le ressort a éprouvé une petite rotation autour de l'axe de son cylindre, effet qui ne pourrait être combattu que par des forces horizontales.

Si $\mu = \mu^0$, $G = \frac{2}{3}E$, on a

$$\zeta = \frac{Pa^2}{E\mu \cos \varphi} \left(\frac{3}{4} \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi \right) l$$

La flexion dominera si $\sin \varphi$ est considérable, et ce sera la torsion s'il est petit.

29. C'est pour ce dernier cas, ou pour des hélices d'un pas très-faible, que M. Giulio a fait ses intéressantes expériences, consignées dans un Mémoire lu, le 11 juillet 1841, à l'Académie de Turin. Sa formule, dressée à priori par des considérations particulières à l'hélice et non applicables à des cas où l'angle ε n'est pas nul, revient à

$$\zeta = \frac{Pa^2}{E\mu \cos \varphi} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{l}{\cos^2 \varphi}$$

elle n'est identique avec la mienne que pour $\cos \varphi = 1$.

Si l'on ne supprime que la quatrième puissance de $\sin \varphi$, la formule de M. Giulio est

$$\frac{Pa^2}{E\mu} \left(\frac{5}{4} + \frac{1}{8} \sin^2 \varphi \right) l$$

et la mienne

$$\frac{Pa^2}{E\mu} \left(\frac{5}{4} + \frac{3}{8} \sin^2 \varphi \right) l$$

Ma formule représente donc un peu mieux que la sienne les résultats des

Vergil fin
de l'œuvre.

expériences de ce savant, car il prend constamment $\cos \varphi = 1$ ou $\zeta = \frac{3}{4} \frac{Pe^2}{E\mu}$ pour y satisfaire.

» 30. J'ai appliqué aussi les méthodes de ce Mémoire à la détermination de la répartition des charges sur les diverses pièces dont se compose un pont en charpente; je ne donne point ici les calculs assez compliqués relatifs à cette question importante : il suffit, pour le moment, d'avoir montré que ces méthodes s'appliquent à toutes les questions de résistance de pièces dont les points sont dans le cas d'éprouver des déplacements très-petits, sous l'action de forces quelconques, données ou non à priori. »

INSTITUT DE FRANCE.

ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES.

Extrait des Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, séance du 20 novembre 1843.

MÉMOIRE

Sur la torsion des prismes à base rectangle et à base losange, et sur une petite correction numérique à faire subir, en général, aux moments de torsion;

PAR M. DE SAINT-VENANT.

§ 1. — Exposition.

- 1. Ce Mémoire a pour objet:
 - 1°. De montrer à quoi tient la différence entre l'expression du moment de résistance à la torsion obtenu par M. Cauchy pour un prisme à base rectangle, et celle que fournissait la théorie ancienne : on verra qu'elle tient à ce que les sections primitivement planes deviennent gauches par la torsion, lorsque les dimensions transversales sont inégales, et de ce que l'ancienne théorie supposait qu'elles restaient planes, d'où il résultait pour la résistance une valeur plus forte que sa valeur réelle;
 - 2°. De montrer qu'il faut faire subir une petite correction numérique aux expressions des moments de torsion en général, à cause du décroissement rapide, auprès du contour, des composantes de pression qui doivent s'y annuler;
 - 3°. D'étendre l'analyse de M. Cauchy au cas où la section du prisme est un losange. L'expression du moment de torsion est la même, en fonction des deux moments d'inertie principaux de la section, que lorsque la base est rectangle : comme la même analyse ne paraît pas s'appliquer exactement et sans difficulté à des sections polygonales, curvilignes, etc. (si ce n'est à une section

circulaire qui donne aussi le même résultat), je conclus que, pour la pratique, et en attendant une solution générale tout à fait exempte d'hypothèses, ce qu'il y a de mieux à faire est d'adopter, pour presque toutes les sections, les mêmes expressions du moment de torsion et du *gauchissement* que pour le rectangle et le losange, qui forment, à quelques égards, deux cas extrêmes et dont l'un, soumis à l'expérience par M. Savart, a donné, comme l'on sait, des résultats conformes à la théorie;

• 4°. De démontrer quelques autres résultats de mécanique moléculaire que j'invoque, comme ceux que je viens d'énoncer, dans mon Mémoire, inséré dans le *Compte rendu* du 30 octobre, sur la *résistance et la flexion des pièces solides*;

• Je crois que l'on me saura gré, auparavant, d'exposer aussi simplement que possible l'analyse de M. Cauchy relative au rectangle; cela dispensera le lecteur d'étudier, pour cette question, une grande partie des années 1828 et 1829 des *Exercices de Mathématiques*.

§ II. — *Rappel des formules de la mécanique moléculaire. Expression générale du moment de torsion.*

• 2. Soient, pour un point quelconque m d'un corps dont les coordonnées primitives sont x, y, z ,

• ξ, η, ζ les déplacements éprouvés dans la direction des trois coordonnées;

• p_{xx}, p_{xy}, p_{xz} les composantes, parallèlement aux x , aux y , aux z , de la pression intérieure supportée par l'unité superficielle d'une petite face plane perpendiculaire aux x , en vertu des forces développées par les déplacements des points du corps;

• p_{yy}, p_{yz}, p_{zz} les composantes de pressions sur des faces perpendiculaires aux y et aux z , la première sous-lettre désignant toujours la face, et la seconde le sens de la décomposition.

• (On a, comme l'on sait, $p_{yx} = p_{xy}$, $p_{zx} = p_{xz}$, $p_{zy} = p_{yz}$)

• ρ la densité, et X, Y, Z les forces accélératrices agissant sur l'unité de la masse du corps.

• Soient, en un point de la surface extérieure du corps,

• π la pression extérieure s'exerçant sur l'unité superficielle;

• $C_{\alpha x}, C_{\alpha y}, C_{\alpha z}$ les cosinus des angles de cette pression avec les x , les y , les z ;

• $C_{\alpha x}, C_{\alpha y}, C_{\alpha z}$ les cosinus des angles formés par la normale à la surface extérieure au même point.

Soient enfin a_{xx} , a_{yy} , etc., six coefficients constants exprimant l'élasticité du corps en divers sens; on suppose qu'il ait des axes d'élasticité parallèles aux x , y , z .

On a, comme l'on sait,

$$(1) \quad \begin{cases} p_{xx} = 3a_{xx} \frac{d\xi}{dx} + a_{xy} \frac{d\eta}{dy} + a_{xz} \frac{d\zeta}{dz}, & p_{yy} = a_{xy} \frac{d\xi}{dx} + 3a_{yy} \frac{d\eta}{dy} + a_{yz} \frac{d\zeta}{dz}, \\ p_{zz} = a_{xz} \frac{d\xi}{dx} + a_{yz} \frac{d\eta}{dy} + 3a_{zz} \frac{d\zeta}{dz}, \end{cases}$$

$$(2) \quad p_{yz} = a_{yz} \left(\frac{d\eta}{dz} + \frac{d\zeta}{dy} \right), \quad p_{zx} = a_{xz} \left(\frac{d\zeta}{dx} + \frac{d\xi}{dz} \right), \quad p_{xy} = a_{xy} \left(\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx} \right).$$

Les équations différentielles indéfinies, à satisfaire pour tous les points du corps, sont

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{dp_{xx}}{dx} + \frac{dp_{xy}}{dy} + \frac{dp_{xz}}{dz} = -\rho X, & \frac{dp_{xy}}{dx} + \frac{dp_{yy}}{dy} + \frac{dp_{yz}}{dz} = -\rho Y, \\ \frac{dp_{xz}}{dx} + \frac{dp_{yz}}{dy} + \frac{dp_{zz}}{dz} = -\rho Z. \end{cases}$$

Les équations définies, à satisfaire pour les points de la surface, sont

$$(4) \quad \begin{cases} p_{xx}C_{nx} + p_{xy}C_{ny} + p_{xz}C_{nz} = \varpi C_{ux}, & p_{xy}C_{nx} + p_{yy}C_{ny} + p_{yz}C_{nz} = \varpi C_{uy}, \\ p_{xz}C_{nx} + p_{yz}C_{ny} + p_{zz}C_{nz} = \varpi C_{uz}. \end{cases}$$

3. Les coefficients différentiels du second membre des expressions (1) ne sont autre chose que les *dilatations* en divers sens. Les binômes différentiels du second membre des expressions (2) sont ce que j'ai appelé les *glissements* estimés en divers sens (*Comptes rendus* des 30 octobre et 6 novembre, nos 2 et suivants). L'un des deux termes représente le déplacement angulaire d'une petite face, et l'autre celui de la droite matérielle qui lui était primitivement perpendiculaire.

Si l'élasticité est la même autour de l'axe des x supposé celui d'une pièce solide, on a

$$a_{xx} = a_{yy}, \quad a_{yy} = a_{zz} = a_{zz},$$

et toutes les quantités a sont égales si l'élasticité est la même dans tous les sens; alors les équations (1) donnent

$$p_{xx} = \frac{5}{2} a \frac{d\xi}{dx} + \frac{p_{yy} + p_{zz}}{4},$$

et, si p_{yy} , p_{zz} sont nuls,

$$\frac{d\eta}{dy} = \frac{d\zeta}{dz} = -\frac{1}{4} \frac{d\xi}{dx},$$

ce qui n'est autre chose que les expressions invoquées nos 3 et 5 du Mémoire du 30 octobre, car a est ce que nous avons appelé G , $\frac{5}{2}a$ ce que nous avons appelé E , p_{yy} , p_{zz} sont ce qui avait été nommé $-\pi_{yy}$, $-\pi_{zz}$.

• 4. Supposons que le corps soit un prisme. Soient

• ω sa section, à la distance x de l'origine des coordonnées;

• $d\omega$ l'élément, au point m , dont les coordonnées transversales sont y , z .

On suppose ces coordonnées parallèles aux axes principaux de la section (en sorte qu'elles ont les mêmes significations que u , v aux Mémoires précités).

• M_x le moment de torsion, ou le moment autour de l'axe du prisme (axe des x) des pressions aux divers points de la section ω .

• On aura

$$(5) \quad M_x = \int_{\omega} (p_{xz}y - p_{xy}z) d\omega.$$

• 5. La méthode générale employée par MM. Poisson et Cauchy pour éviter une intégration impossible dans l'état actuel des connaissances, est, dans le cas d'une *pièce* solide dont les dimensions transversales sont, en général, petites par rapport aux autres données, de supposer que les pressions p et les déplacements ξ , η , ζ sont développables en séries convergentes ordonnées suivant les puissances entières et positives des coordonnées que nous avons représentées par y , z , et de négliger, à diverses époques du calcul, les termes d'ordre supérieur devant ceux d'ordre inférieur.

• Désignons par p^0 , $\frac{dp^0}{dy}$, $\frac{d^2p^0}{dydz}$, $\dots$, ξ^0 , $\frac{d\xi^0}{dy}$, $\dots$, les valeurs des pressions et déplacements, et de leurs coefficients différentiels, au centre de la section où l'on a $y = 0$, $z = 0$; nous aurons

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} p &= p^0 + \frac{dp^0}{dy} y + \frac{d^2p^0}{dz^2} z + \frac{1}{2} \left(\frac{d^3p^0}{dy^3} y^2 + \frac{d^3p^0}{dydz} yz + \frac{d^3p^0}{dz^3} z^2 \right) \\ &\quad + \frac{1}{3!} \left(\frac{d^4p^0}{dy^4} y^3 + 3 \frac{d^4p^0}{dy^2dz} y^2z + 3 \frac{d^4p^0}{dydz^2} yz^2 + \frac{d^4p^0}{dz^4} z^3 \right) + \text{etc.} \end{aligned} \right.$$

(7) Et ξ , η , ζ , ainsi que X , Y , Z = des développements semblables.

« 6. Si l'on substitue ces développements dans les équations (1), (2), (3), et si l'on assimile, dans les deux membres, les coefficients des mêmes puissances ou produits de y et z , on verra que l'on peut, dans ces trois équations, remplacer à volonté les quantités qui y entrent par ces mêmes quantités, ou leurs coefficients différentiels d'ordre quelconque, affectées de l'indice 0.

« 7. Et, si on les substitue dans l'expression du moment de torsion, en supposant la section symétrique, ou telle que $\int y^2 d\omega = 0$, $\int y z^2 d\omega = 0$, $\int y^2 z d\omega = 0$, $\int z^2 d\omega = 0$, on aura

$$(8) \quad M_t = \frac{dp_{yz}}{dy} \int y^2 d\omega - \frac{dp_{zy}}{dz} \int z^2 d\omega + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 p_{yz}}{dy dz} - \frac{d^2 p_{zy}}{dy dz} \right) \int y^2 z^2 d\omega + \text{etc.}$$

§ III. — Cas d'un prisme à base rectangle.

« 8. Soient $2h$, $2i$ les deux côtés de la base, parallèlement aux y et aux z ;

« $\mu = \int z^2 d\omega = \frac{2}{3} h i^3$, $\mu' = \int y^2 d\omega = \frac{2}{3} h^3 i$ les moments d'inertie de la section a autour des axes des y et des z ;

« G la valeur des quantités a_{xx} , a_{yy} , etc., quand elles sont toutes égales ;

« θ la torsion, ou l'angle dont les sections ont tourné l'une devant l'autre, pour une distance égale à l'unité.

« Supposons les pressions extérieures nulles, les équations définies (4) deviendront

$$(9) \quad p_{yy} = 0, \quad p_{xy} = 0, \quad p_{yz} = 0 \quad \text{pour } y = \pm h, \quad \text{quel que soit } z,$$

$$(10) \quad p_{zz} = 0, \quad p_{xz} = 0, \quad p_{yz} = 0 \quad \text{pour } z = \pm i, \quad \text{quel que soit } y.$$

« Si l'on substitue, dans les premières, le développement (6), on aura une suite de relations telles que

$$p^0 + \frac{dp^0}{dy} h + \frac{1}{2} \frac{d^2 p^0}{dy^2} h^2 + \dots = 0, \quad \frac{dp^0}{dz} + \frac{2}{2} \frac{d^2 p^0}{dy dz} + \frac{3}{2 \cdot 3} \frac{d^3 p^0}{dy^2 dz} h^2 + \dots = 0, \text{ etc.};$$

$$p^0 - \frac{dp^0}{dy} h + \frac{1}{2} \frac{d^2 p^0}{dy^2} h^2 - \dots = 0, \quad \frac{dp^0}{dz} - \frac{2}{2} \frac{d^2 p^0}{dy dz} + \frac{3}{2 \cdot 3} \frac{d^3 p^0}{dy^2 dz} h^2 + \dots = 0, \text{ etc.}$$

« L'addition et la soustraction successive de ces relations les remplacera par celles-ci, qui sont plus simples :

$$(11) \left\{ \begin{array}{l} p_{xz} \left\{ \begin{array}{l} p^0 + \frac{d^2 p^0}{dy^2} \frac{h^2}{2} + \dots = 0, \quad \frac{dp^0}{dz} + \frac{d^2 p^0}{dy dz} \frac{h^2}{2} + \dots = 0, \\ \frac{d^2 p^0}{dz^2} + \frac{d^2 p^0}{dy^2 dz^2} \frac{h^2}{2} + \dots = 0, \text{ etc.}, \\ p_{yz} \left\{ \begin{array}{l} \frac{dp^0}{dy} + \frac{d^2 p^0}{dy^3} \frac{h^2}{6} + \dots = 0, \quad \frac{d^2 p^0}{dy dz} + \frac{d^2 p^0}{dy^2 dz} \frac{h^2}{6} + \dots = 0, \text{ etc.} \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Les équations (10) donneront de même

$$(12) \left\{ \begin{array}{l} p_{xz} \left\{ \begin{array}{l} p^0 + \frac{d^2 p^0}{dz^2} \frac{l^2}{2} + \dots = 0, \quad \frac{dp^0}{dy} + \frac{d^2 p^0}{dy dz^2} \frac{l^2}{2} + \dots = 0, \\ \frac{d^2 p^0}{dy^2} + \frac{d^2 p^0}{dy^2 dz^2} \frac{l^2}{2} + \dots = 0, \text{ etc.}, \\ p_{yz} \left\{ \begin{array}{l} \frac{dp^0}{dz} + \frac{d^2 p^0}{dz^3} \frac{l^2}{6} + \dots = 0, \quad \frac{d^2 p^0}{dy dz} + \frac{d^2 p^0}{dy^2 dz} \frac{l^2}{6} + \dots = 0, \text{ etc.} \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

9. On remarque que p_{yz} appartient aux relations (12) comme aux relations (11); on peut donc tirer p_{yz}^0 de la première de chacune d'elles, puis y mettre, pour les coefficients différentiels du deuxième ordre, leurs valeurs tirées de la troisième relation de l'autre série; on aura ainsi

$$p_{yz}^0 = -\frac{d^2 p_{xz}^0}{dy^2} \frac{h^2}{2} + \dots = -\frac{d^2 p^0}{dz^2} \frac{l^2}{2} + \dots = \frac{h^2 l^2}{4} \frac{d^4 p_{xz}^0}{dy^2 dz^2} + \text{etc.},$$

d'où il suit que p_{yz}^0 n'a qu'une valeur qui dépend de termes du quatrième ordre, et peut être supposé nul. Il en résulte, d'après la première équation (2), et ce que nous avons dit (6),

$$(13) \quad \frac{d\theta^0}{dz} + \frac{d\zeta^0}{dy} = 0,$$

c'est-à-dire que le glissement sur une section longitudinale du prisme a une composante transversale nulle.

Cette équation (13) exprime aussi que deux droites primitivement parallèles aux y et aux z , tracées sur la section ω et se coupant au centre de cette section, sont restées perpendiculaires entre elles après le déplacement des points du corps; mais chacun des termes dont son premier membre se compose représente la grandeur angulaire de la rotation effectuée par ces deux droites autour de l'axe du prisme. On a donc, pour la torsion,

$$(14) \quad \theta = \frac{d}{dx} \frac{d\zeta^0}{dy} = -\frac{d}{dx} \frac{d\theta^0}{dz}.$$

En sorte que les équations (a) donnent, d'après ce qu'on a observé (n° 6),

$$(15) \quad \frac{dp_{zs}^2}{dy} = a_{zs} \left(\theta + \frac{d^2 \zeta_s^2}{dy dz} \right), \quad \frac{dp_{zy}^2}{dz} = a_{zy} \left(-\theta + \frac{d^2 \zeta_s^2}{dy dz} \right);$$

d'où, en éliminant $\frac{d^2 \zeta_s^2}{dy dz}$,

$$(16) \quad \frac{1}{a_{zs}} \frac{dp_{zs}^2}{dy} - \frac{1}{a_{zy}} \frac{dp_{zy}^2}{dz} = 2\theta.$$

10. Il s'agit d'avoir une autre relation entre $\frac{dp_{zs}^2}{dy}$, $\frac{dp_{zy}^2}{dz}$, qui entrent dans l'expression (8) du moment de torsion, afin de pouvoir y substituer leur valeur en fonction de la torsion θ .

Servons-nous, pour cela, de la première équation indéfinie (3), savoir :

$$\frac{dp_{zs}}{dx} + \frac{dp_{zy}}{dy} + \frac{dp_{zs}}{dz} = -\rho X.$$

Elle donne, d'après ce que nous avons vu (n° 6),

$$(17) \quad \frac{d^2 p_{zs}^2}{dx dy dz} + \frac{d^2 p_{zy}^2}{dy^2 dz} + \frac{d^2 p_{zs}^2}{dy dz^2} = -\rho \frac{d^2 X^2}{dy dz}.$$

Mais les relations (11), (12), qui viennent des équations définies, donnent

$$(18) \quad \frac{dp_{zs}^2}{dy} = -\frac{d^2 p_{zs}^2}{dy dz^2} \frac{i^2}{2} + \dots, \quad \frac{dp_{zy}^2}{dz} = -\frac{d^2 p_{zy}^2}{dy^2 dz} \frac{h^2}{2} + \dots;$$

d'où

$$(19) \quad h^2 \frac{dp_{zs}^2}{dy} + i^2 \frac{dp_{zy}^2}{dz} = -\frac{h^2 i^2}{2} \left(\frac{d^2 p_{zs}^2}{dy dz^2} + \frac{d^2 p_{zy}^2}{dy^2 dz} \right) + \text{termes du sixième ordre}.$$

Les termes entre parenthèses du deuxième membre, considérés un à un, ne sauraient être supprimés, quoique affectés du produit du quatrième ordre $h^2 i^2$, car les équations (18) prouvent qu'ils sont, ainsi multipliés, du même ordre de grandeur que ceux du premier membre affectés des simples carrés de h et i . Mais l'équation précédente (17) prouve que leur somme peut être effacée; en effet, en la tirant de cette équation, et substituant dans celle (19), celle-ci devient

$$(20) \quad h^2 \frac{dp_{zs}^2}{dy} + i^2 \frac{dp_{zy}^2}{dz} = \frac{h^2 i^2}{2} \left(\frac{d^2 p_{zs}^2}{dx dy dz} + \rho \frac{d^2 X^2}{dy dz} \right) + \text{termes du sixième ordre}.$$

Or, ce qui se trouve dans la parenthèse du second membre n'est plus d'un ordre de grandeur supérieur aux coefficients différentiels qui entrent dans le premier membre, car la traction ou pression longitudinale p_{xx}^* , suivant l'axe du prisme, ne varie jamais brusquement ou très-rapidement, dans aucun des trois sens des x , des y , des z , et l'on peut en dire autant de la composante de force accélératrice X_0 . Il n'y a d'exception, tout au plus, en ce qui regarde la traction longitudinale, qu'en des points tout à fait particuliers, comme ceux où sont appliquées les forces isolées; or, ce qui se passe à ces points, ou tout auprès, n'étend pas sensiblement son influence sur le reste, et nous avons dit, au Mémoire du 30 octobre, que tout ce que l'on donne dans la théorie de la résistance des solides regarde seulement les points à une certaine distance de ceux-là.

On peut donc supprimer le deuxième membre de l'équation précédente comme d'une grandeur négligeable, et l'on a, pour la relation cherchée,

$$(21) \quad h^2 \frac{dp_{xx}^*}{dz^2} + i^2 \frac{dp_{xx}^*}{dx^2} = 0,$$

qui donne, avec (16),

$$(22) \quad \frac{dp_{xx}^*}{dy^2} = \frac{2i^2}{h^2 + i^2} \theta, \quad \frac{dp_{xx}^*}{dz^2} = \frac{-2h^2}{h^2 + i^2} \theta.$$

11. On peut remplacer les rapports des carrés h^2 , i^2 par celui des moments d'inertie μ' , μ . Substituant dans l'expression générale (8) du moment de torsion, en n'y conservant que les deux premiers termes, on a

$$(23) \quad M_t = \frac{4\mu\mu'}{a_{xx} + a_{yy}} \theta,$$

ou, si $a_{xx} = a_{yy} = G$,

$$(24) \quad M_t = G \frac{2\mu \cdot 2\mu'}{\mu + \mu'} \theta,$$

ou, encore,

$$(25) \quad M_t = \frac{16}{3} G \frac{h^2 i^2}{h^2 + i^2} \theta.$$

12. Voyons en quoi cette expression diffère de celle de la théorie an-

cienne : celle-ci donnait

$$M_t = G \theta (\mu + \mu'), \quad \frac{dp'_{xz}}{dy} = G \theta, \quad \frac{dp'_{yz}}{dz} = - G \theta.$$

Si l'on compare ces expressions à celles (15), on voit que la théorie ancienne supposait nul le coefficient différentiel $\frac{d^1 \xi^0}{dy dz}$; et c'était à tort, car en mettant dans l'une des équations (15), à la place de $\frac{dp'_{xz}}{dy}$ ou $\frac{dp'_{yz}}{dz}$, sa valeur (22), on trouve

$$(26) \quad \frac{d^1 \xi^0}{dy dz} = \frac{\frac{\mu'}{a_{xy}} - \frac{\mu}{a_{xz}}}{\frac{\mu'}{a_{xy}} + \frac{\mu}{a_{xz}}} \theta;$$

d'où il suit que $\frac{d^1 \xi^0}{dy dz}$ ne saurait être nul, à moins que la torsion θ ne soit nulle elle-même, ou que les deux moments d'inertie μ, μ' ne soient égaux (lorsque l'élasticité est la même dans les deux sens transversaux).

« Or, que représente cette quantité $\frac{d^1 \xi^0}{dy dz}$, négligée par l'ancienne théorie?

« Pour le savoir, posons $\frac{d^1 \xi}{dy dz} = \gamma$; nous en tirerons, en supposant ξ nul en même temps que y et z ,

$$\xi = \gamma yz;$$

c'est l'équation d'une surface gauche dans le genre d'une double aile de moulin à vent : on voit, par les changements de signe dans les quatre angles droits formés par les axes y et z , que cette surface est composée de quatre parties symétriques, dont deux formant creux et les deux autres saillie sur le plan $\xi = 0$.

« Or, ξ est la petite quantité dont un point matériel d'une section s'est éloigné du plan primitif de cette section. Donc la section, de plaque qu'elle était, est devenue gauche, et γ mesure le degré de son *gauchissement*, au moins quand on se borne aux points peu éloignés du centre de la section, ou quand on néglige les quantités du second ordre.

« L'ancienne théorie était donc inexacte, en ce qu'elle négligeait le gauchissement des sections; elle donnait des moments trop forts, car les éléments des sections, en s'inclinant par rapport à l'axe du prisme, ainsi qu'ils y sont sollicités, prennent moins d'inclinaison sur les lignes matérielles qui

leur étaient primitivement normales, que si ces éléments restaient tous dans le même plan.

§ IV. — *Correction numérique à faire au moment de torsion.*

» 13. Cette correction vient de la prise en considération du terme du quatrième ordre de l'expression (8), que nous avons supprimé au n° 11.

» Si l'on tire des relations (10) et (11) les valeurs des coefficients différentiels du troisième ordre $\frac{d^3 p_{xz}^0}{dy^2 dz^2}$, $\frac{d^3 p_{xy}^0}{dy^2 dz^2}$, en fonction de ceux d'ordre inférieur, on verra qu'il fallait prendre

$$(27) \quad \begin{cases} p_{xz} = \left(1 - \frac{z^2}{\rho^2}\right) \left(p_{xz}^0 + \frac{dp_{xz}^0}{dy} y + \frac{dp_{xz}^0}{dz} z + \dots\right), \\ p_{xy} = \left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right) \left(p_{xy}^0 + \frac{dp_{xy}^0}{dy} y + \frac{dp_{xy}^0}{dz} z + \dots\right). \end{cases}$$

D'où il résulterait qu'il faudrait multiplier par $\frac{2}{3}$ l'expression (23) du moment de torsion pour la rendre exacte.

» Mais la substitution indéfinie, aux coefficients différentiels d'ordre supérieur, de leurs valeurs en fonction de ceux d'ordre inférieur tirées de (10) et (11), conduirait à l'absurde; et comme les conditions de nullité de p_{xz} , p_{xy} pour $z = \pm i$, $y = \pm h$, sont aussi bien remplies en donnant $1 - \frac{z^2}{\rho^2}$, $1 - \frac{y^2}{h^2}$,

pour facteur à (27), qu'en leur donnant $1 - \frac{z^2}{\rho^2}$, $1 - \frac{y^2}{h^2}$, et comme ces pressions ne décroissent peut-être sensiblement qu'à de très-petites distances du contour des sections, il est possible que la correction à faire soit beaucoup moindre que celle qui résulte du facteur $\frac{2}{3}$. On pense qu'il faut l'emprunter à l'expérience.

» Or les expériences connues prouvent qu'elle doit être faible. Celles de Savart semblent indiquer qu'il faut prendre 0,9 pour coefficient de correction du moment de torsion, et généralement de toutes les formules (Mémoires précités) où entre la constante G.

§ V. — *Cas d'un prisme à base losange.*

» 14. Soient h , i les deux demi-diagonales du losange, parallèles aux y et aux z . Supposons toujours les pressions extérieures nulles; les équations

définies (4) donneront, sur les quatre côtés du losange,

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} -h p_{xz} - i p_{xy} = 0 \text{ pour } y = h \left(1 + \frac{z}{i} \right) \text{ quel que soit } z, \\ h p_{xz} + i p_{xy} = 0 \text{ pour } y = -h \left(1 + \frac{z}{i} \right) \text{ quel que soit } z, \\ h p_{xz} - i p_{xy} = 0 \text{ pour } y = h \left(1 + \frac{z}{i} \right) \text{ quel que soit } z, \\ -h p_{xz} + i p_{xy} = 0 \text{ pour } y = -h \left(1 + \frac{z}{i} \right) \text{ quel que soit } z. \end{array} \right.$$

Substituant les développements (7) de p_{xz} , p_{xy} , ordonnant par rapport à z et égalant à zéro les coefficients des mêmes puissances de z , on aura une suite de relations que l'on réduira à d'autres plus simples en les ajoutant ensemble deux à deux ou en les soustrayant l'une de l'autre. En ordonnant par rapport à y , on aurait des équations qui n'en diffèreraient que par la forme.

» Parmi toutes ces équations on prendra celles-ci :

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dp_{xz}}{dy} + \frac{h^2}{6} \frac{d^3 p_{xz}}{dy^3} + \dots = 0, \quad \frac{dp_{xy}}{dz} + \frac{i}{6} \frac{d^3 p_{xy}}{dz^3} + \dots = 0, \\ -\frac{h^2}{i} \frac{dp_{xz}}{dy} + \frac{dp_{xz}}{dz} - \frac{3h^2}{6i} \frac{d^3 p_{xz}}{dy^3} + \frac{h^2}{2} \frac{d^3 p_{xy}}{dy^2 dz} + \dots = 0, \\ -\frac{h^2}{(i^2)} \frac{d^2 p_{xz}}{dy^2} + \frac{h^2}{2i^2} \frac{d^2 p_{xy}}{dy dz} - \frac{h^2}{2i^2} \frac{d^2 p_{xz}}{dy dz} + \frac{1}{6} \frac{d^4 p_{xz}}{dz^4} + \dots = 0. \end{array} \right.$$

» Si l'on y joint l'équation (17), on pourra éliminer tout, excepté

$$\frac{dp_{xz}}{dy}, \frac{dp_{xy}}{dz} \text{ et } \frac{d^2 p_{xz}}{dx dy dz} + \rho \frac{d^2 X_0}{dy dz};$$

cette dernière somme sera, comme dans l'équation (20), affectée de $h^2 i^2$; on la supprimera comme nous avons fait au n° 11, ce qui donnera

$$3h^2 \frac{d^2 p_{xz}}{dy} + 3i^2 \frac{d^2 p_{xy}}{dz} = 0,$$

c'est-à-dire précisément la même relation (21) que nous avons trouvée pour le rectangle.

» Il en résulte que l'on a, pour un prisme à base losange, les mêmes expressions (24) et (26) du moment de torsion, et du gauchissement, que pour un prisme à base rectangle. »

IMPRIMERIE DE BACHELIER,

RUE DU JARDINER, 12.

INSTITUT DE FRANCE.

ACADEMIE ROYALE DES SCIENCES.

Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, tome XIX,
séance du 1^{er} juillet 1844.

NOTE

Sur l'état d'équilibre d'une verge élastique à double courbure lorsque les déplacements éprouvés par ses points, par suite de l'action des forces qui la sollicitent, ne sont pas très-petits;

PAR M. DE SAINT-VENANT.

« 1. M. Binet, et ensuite M. Wantzel, viennent de donner (*Comptes rendus* des 17 et 24 juin) les intégrales des équations de la courbe élastique à double courbure provenant de la flexion et de la torsion d'une verge ou d'une portion de verge cylindrique et primitivement droite, sollicitée à ses extrémités seulement. Ces intégrales s'appliquent à des déplacements des points aussi grands qu'on veut, pourvu, bien entendu, qu'ils n'aillent pas jusqu'à altérer l'élasticité de la matière. Elles supposent admis ce théorème de Poisson : « que le moment qui tend à produire la torsion (ou le moment opposé qui y résiste dans l'état d'équilibre) est constant dans toute l'étendue » de la verge. »

« D'un autre côté, j'ai donné, le 30 octobre et le 6 novembre 1843 (*Comptes rendus*, tome XVII), des équations et leurs intégrales, pour une verge élastique dont la forme primitive et le mode de sollicitation sont absolument quelconques et en tenant compte de plusieurs éléments nouveaux, mais seulement lorsque les déplacements restent très-petits, ce qui est le cas le plus ordinaire des applications.

Je me propose dans cette Note:

1°. De donner les équations différentielles de l'état d'équilibre d'une verge élastique dans le cas le plus général et pour des déplacements quelconques de ses points;

2°. De montrer dans quelles limites le théorème de Poisson est applicable, ainsi que les équations dont il l'a tiré.

2. Soient, pour l'état primitif de la verge, ou avant les déplacements éprouvés,

x_0, y_0, z_0 les coordonnées rectangulaires, par rapport à trois plans fixes, d'un point M de l'axe de la verge, ou de la ligne courbe qui unit les centres de gravité des sections transversales, normales à ce même axe;

s_0 la longueur de l'arc de la même courbe mesuré jusqu'en M;

ρ_0 son rayon de courbure aussi en M;

$\frac{ds_0}{\tau_1}$ l'angle de deux de ses plans osculateurs, en M et en un point à une distance infiniment petite ds_0 de M.

Soient, pour l'état d'équilibre que l'on cherche à déterminer,

x, y, z, s, ρ et $\frac{ds}{\tau}$ les valeurs nouvelles des mêmes quantités, au même point matériel M de l'axe.

Soient encore,

ω la section transversale passant par M;

m un des points de cette section;

$d\omega$ son élément en m ;

u, v les coordonnées du point m , par rapport aux deux axes principaux Mu, Mv de la section;

$\mu = \int_0^{\omega} v^2 d\omega$, $\mu' = \int_0^{\omega} u^2 d\omega$ les moments d'inertie de ω autour de Mu,

Mv, et $\mu'' = \frac{2uv\mu'}{\mu + \mu'}$;

ϵ l'angle formé primitivement, sur cette même section, par l'axe principal Mv avec le plan osculateur, du côté du prolongement du rayon de courbure ρ_0 ;

$\epsilon + \tau$ l'angle formé de même, après les déplacements, par la ligne Mv et par le nouveau plan osculateur, en sorte que τ est le déplacement angu-

laire du plan osculateur, ou du rayon de courbure par rapport aux points matériels de la section ω ;

M_x, M_y, M_z , les trois sommes des moments, autour de trois lignes menées par M parallèlement aux coordonnées, de toutes les forces extérieures qui agissent, dans le second état de la verge, sur ses divers points entre la section ω et l'une de ses deux extrémités;

M_1, M_2, M_3 , les trois sommes des moments des mêmes forces autour, 1° d'une tangente à l'axe de la verge en M; 2° et 3° des axes principaux Mu, Mv de la section;

E et G les deux coefficients numériques connus, dits d'élasticité, par lesquels il faut multiplier la proportion de la dilatation (positive ou négative) et du glissement transversal des parties d'un corps élastique (*Compte rendu du 30 octobre*) pour avoir, par unité superficielle, les résistances intérieures opposées à ces mouvements (on a ordinairement $G = \frac{3}{2} E$);

a la proportion de la dilatation au point m , dans un sens parallèle à l'axe;

ϵ la torsion, ou ϵds le petit angle dont ont tourné l'une devant l'autre, pendant les déplacements, la section ω et une autre section ω' faite à une distance ds de celle-ci.

» Concevons, entre les deux mêmes sections très-voisines ω et ω' , la verge divisée en fibres ou en petites portions cylindriques parallèles ou presque parallèles à l'axe, selon que ces sections sont égales ou légèrement inégales. Considérons la fibre qui a pour base l'élément $d\omega$ dont le centre est en m .

» Comme les deux sections étaient primitivement deux plans dont les prolongements se coupaient à une distance de l'axe égale au rayon de courbure ρ_0 , la longueur ds_0 de la fibre centrale était, à la longueur de la fibre dont nous parlons, comme ρ_0 est à ce même rayon augmenté de la distance du point m à une droite perpendiculaire à ρ_0 , tracée par M sur la section. Or cette distance est

$$u \sin \epsilon + v \cos \epsilon;$$

donc la longueur de la fibre était dans l'état primitif

$$(1) \quad ds_0 \left(1 + \frac{u \sin \epsilon + v \cos \epsilon}{\rho_0} \right).$$

Après les déplacements des points de la verge, les sections sont devenues

légèrement obliques à l'axe, et se sont changées en deux surfaces gauches : nous tiendrons compte, tout à l'heure, de l'influence du gauchissement sur le moment de torsion, mais nous négligerons dans cette Note son effet, ainsi que celui de l'obliquité de l'axe, sur l'allongement des fibres. La longueur de la fibre après les déplacements aura donc une expression semblable à (1), ou

$$(2) \quad ds \left[1 + \frac{u \sin(\epsilon + \iota) + v \cos(\epsilon + \iota)}{\rho} \right].$$

On aura, pour la proportion de dilatation, l'excès de (2) sur (1) divisé par (1); mais, dans cette division, on peut réduire l'expression (1) à ds_0 , car les dimensions transversales d'où dépendent u et v sont supposées toujours petites par rapport au rayon de courbure ρ_0 . Nous négligerons aussi, pour simplifier, l'effet ordinairement peu considérable de la dilatation de la fibre centrale, ou nous remplacerons $\frac{ds}{ds_0}$ par 1. Nous aurons ainsi

$$(3) \quad \gamma = u \left[\frac{\sin(\epsilon + \iota)}{\rho} - \frac{\sin \epsilon}{\rho_0} \right] + v \left[\frac{\cos(\epsilon + \iota)}{\rho} - \frac{\cos \epsilon}{\rho_0} \right].$$

Nous supposons encore que les pressions latérales des fibres les unes sur les autres sont nulles ou négligeables, en sorte que les fibres résistent à l'allongement comme si elles étaient isolées [*]. La résistance de celle que nous considérons sera, d'après la définition même du coefficient E ,

$$(4) \quad E \delta . d\omega.$$

Quant à la torsion ϵds , qu'à la rotation relative de ω et ω' , on l'exprimera si l'on considère que ϵ est la quantité dont la première de ces deux sections a tourné par rapport au plan osculateur en M , et que $\epsilon + d\epsilon$ est la quantité dont la seconde a tourné par rapport au plan osculateur mené à une distance ds de M ; d'où il suit que si l'on ajoute à l'excès $d\epsilon$ la quantité $\frac{ds}{r} = \frac{ds_0}{r_0}$, dont ces deux plans eux-mêmes ont tourné l'un par rapport à l'autre, on aura la rotation relative totale des deux sections. Donc,

[*] On tient compte facilement de toutes les quantités que nous négligeons ici, au moyen des considérations du Mémoire du 30 octobre, et du § IV de celui du 20 novembre. (*Comptes rendus*, tome XVII.)

en négligeant toujours la différence $\frac{ds}{ds_0}$ à l'unité, on a

$$(5) \quad \epsilon = \frac{ds}{ds} + \frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau_0}.$$

» Cette quantité, multipliée par le coefficient G et par $2\mu'' = \frac{4\mu\mu'}{\mu + \mu'}$, devra être égale, pour l'équilibre, au moment M_t des forces extérieures, car les considérations présentées à ce sujet le 30 octobre et le 20 novembre s'appliquent facilement à des déplacements angulaires d'une grandeur quelconque. Les deux autres moments M_s , M_r des mêmes forces autour de Mu , Mv , devront être égaux respectivement aux moments, autour des mêmes axes, des résistances des fibres (4) pour tous les éléments $d\omega$. Substituant pour ϵ sa valeur (3), on aura ainsi, eu égard à ce que $\int_0^\pi uv d\omega = 0$, les trois équations d'équilibre

$$(6) \quad \begin{cases} M_s = E\mu \left[\frac{\cos(e+s)}{\rho} - \frac{\cos e}{\rho_0} \right], \\ M_r = E\mu' \left[\frac{\sin(e+s)}{\rho} - \frac{\sin e}{\rho_0} \right], \\ M_t = 2G\mu'' \left[\frac{ds}{ds} + \frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau_0} \right]. \end{cases}$$

» 3. Si nous ajoutons les deux premières, multipliées respectivement par $\cos e$ et $\sin e$, et si, ensuite, nous retranchons la seconde, multipliée par $\cos e$ de la première, multipliée par $\sin e$, nous avons les deux suivantes, où l'angle s se trouve moins engagé :

$$(7) \quad \frac{\cos s}{\rho} = \frac{1}{\rho_0} + \frac{M_s}{E\mu} \cos e + \frac{M_r}{E\mu'} \sin e; \quad \frac{\sin s}{\rho} = \frac{M_r}{E\mu} \cos e - \frac{M_s}{E\mu'} \sin e.$$

» On en élimine cet angle inconnu en élevant au carré et ajoutant; et, comme $d\epsilon = \frac{d \cdot \sin s}{\cos s}$, elles donnent aussi le moyen de l'éliminer de la troisième équation (6). On a ainsi ces équations, où s ne se trouve plus :

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{\rho_0^2} + \frac{2}{\rho_0} \left(\frac{M_s}{E\mu} \cos e + \frac{M_r}{E\mu'} \sin e \right) + \left(\frac{M_s}{E\mu} \right)^2 + \left(\frac{M_r}{E\mu'} \right)^2, \\ \frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_0} + \frac{M_t}{2G\mu''} - \frac{\frac{d}{ds} \cdot \rho \left(\frac{M_s}{E\mu} \cos e - \frac{M_r}{E\mu'} \sin e \right)}{\rho \left(\frac{1}{\rho_0} + \frac{M_s}{E\mu} \cos e + \frac{M_r}{E\mu'} \sin e \right)}. \end{cases}$$

On a, de plus, $ds = ds_0$.

« Ce sont les trois équations différentielles de l'intégration desquelles dépendra la détermination des coordonnées x, y, z d'un point quelconque de l'axe de la verge, après le déplacement de ses parties, en fonction de ses coordonnées primitives, ou de l'une d'elles, x_0 par exemple, ou d'une autre variable indépendante, telle que l'arc s_0 . En effet, $\rho, \tau, ds, M_1, M_2, M_3$, s'exprimeront en fonction des coordonnées nouvelles que l'on cherche, de leurs différentielles des trois premiers ordres, et de ε qu'on en élimine à l'aide de l'équation (7), tandis que toutes les autres quantités s'exprimeront en fonction de la variable indépendante, au moyen de la connaissance que l'on a de la forme primitive de la courbe, et de la position initiale des axes principaux de ses sections.

« 4. Ces trois équations, simultanées du troisième ordre et non linéaires, se simplifient :

« 1°. Lorsque la section transversale est partout un cercle, un carré ou une autre figure dont tous les axes sont *principaux*; alors $\mu = \mu' = \mu''$, et comme on peut prendre pour axe M_3 la direction primitive du rayon de courbure sur la section, on peut faire $\varepsilon = 0$; mais ε n'est pas nul, et les équations paraissent toujours difficilement intégrables.

« 2°. Lorsque la verge est primitivement droite. Alors $\frac{1}{\rho} = 0$, et comme le plan osculateur primitif peut être choisi arbitrairement en chaque point, on peut prendre pour tel, d'un bout à l'autre de la verge, un même plan passant par son axe rectiligne, ce qui donne aussi $\frac{1}{\tau} = 0$; mais ε subsiste ainsi que ε , et l'intégration paraît toujours difficile.

« Elles se simplifient bien davantage, ainsi que nous avons dit, quand les déplacements $x - x_0, y - y_0, z - z_0$ sont très-petits, ainsi que ε ; alors on peut mettre les coordonnées anciennes au lieu des nouvelles dans les trois moments M ; et comme les premiers membres deviennent linéaires, on obtient cette intégrale assez simple, où tout est exprimable en s ou s_0 , choisi pour variable, et où $(uy), (vy), (ly), (uz), (vz), (lz)$ représentent les angles des axes de M_1, M_2, M_3 avec les y et les z [*]:

$$\begin{aligned} x - x_0 = & \int \frac{dx_0}{ds} ds \int \left[\frac{M_1 \cos(uy)}{E \mu} + \frac{M_2 \cos(vy)}{E \mu'} + \frac{M_3 \cos(ly)}{2 G \mu''} \right] ds \\ & - \int \frac{dy_0}{ds} ds \int \left[\frac{M_1 \cos(uz)}{E \mu} + \frac{M_2 \cos(vz)}{E \mu'} + \frac{M_3 \cos(lz)}{2 G \mu''} \right] ds. \end{aligned}$$

[*] Formules (18) et (20) du Mémoire du 20 novembre, en effaçant les éléments négligés ci-dessus.

On en a deux semblables pour $y - y_0$, $z - z_0$, d'où il suit que les déplacements s'obtiennent par les quadratures.

» 5. Elles se simplifient encore beaucoup lorsque les deux circonstances (1^{re}) et (2^{re}) du numéro précédent se réunissent, c'est-à-dire lorsque la verge est primitivement droite, et que la section a une figure pour laquelle tous les moments d'inertie μ sont égaux.

» Alors, ce qu'il y a de plus commode est de choisir pour axe Mv la trace, sur chaque section, du plan osculateur de la courbe engendrée par les déplacements, ce qui donne $e + \epsilon = 0$, et de prendre, comme on a déjà dit, un plan osculateur unique pour toute l'étendue de la verge dans son état primitif. Les angles disparaissent des deux premières équations (6), mais celui ϵ subsiste en tous cas dans la troisième.

» Alors ces équations différentielles, en faisant,

$$(9) \quad 2G\mu \left(\frac{d\theta}{ds} + \frac{1}{r} \right) = -\theta,$$

se réduisent à

$$(10) \quad \frac{E\mu}{r} = M_n, \quad 0 = M_r, \quad -\theta = M_t.$$

Si on les multiplie respectivement par les cosinus des trois angles que forment, avec l'axe des x , la normale (Mu) au plan osculateur, le prolongement (Mv) du rayon de courbure, et la tangente à la courbe, et si on les ajoute ensuite, le second membre ne sera autre chose que le moment M_x des forces extérieures autour d'une parallèle aux x , menée par le point M ; donc on a

$$(11) \quad E\mu \frac{dy' dz' - dz' dy'}{ds^3} - \theta \frac{dx}{ds} = M_x.$$

Cette équation, et deux autres que l'on peut former de même pour les moments autour de parallèles aux y et aux z , sont celles de Lagrange, complétées au moyen de la théorie de M. Binet, qui a servi à y ajouter les seconds termes, et dont Poisson a tiré, en les différentiant et les ajoutant, son théorème $d\theta = 0$ ou $M_t = \text{constante}$. Ce sont aussi les équations que MM. Binet et Wantzel ont intégrées lorsque μ est également constant, et que les forces qui entrent dans les seconds membres n'agissent qu'aux extrémités; leur analyse est bien applicable alors à la détermination de l'état d'équilibre de la verge, en y joignant l'équation (9).

» 6. Mais, hors le cas un peu plus général énoncé au commencement de

l'article 5, on peut dire que la *constante nullité du moment M_z des forces* [2^e équation (10)] *autour du rayon de courbure n'aura jamais lieu. Ce moment aura généralement une grandeur finie, tout comme le moment M_t autour de la tangente à la courbe d'axe, et le moment M_n autour de la normale au plan osculateur. Le théorème $M_t = \text{constante}$, lié à $M_z = 0$, n'aura donc lieu que dans ce cas-là (où la pièce était primitivement droite, et où l'on avait $\mu = \mu'$), et les équations (10), (11) sont incomplètes dans tout autre cas.*

• Si Poisson semble établir ce théorème et les équations (11) d'une manière générale, c'est qu'il omet, dans son analyse, ce troisième moment M_z , qui tend à fléchir une verge courbe transversalement à son plan osculateur actuel si elle était déjà courbe, et, par conséquent, à changer le plan de sa courbure. Lagrange n'avait fait attention qu'au moment M_n , qui tend à augmenter ou à diminuer la courbure dans son plan actuel, ce qui suffit pour les courbes planes restant planes. M. Binet y a ajouté le moment M_t , tendant à tordre, et cela suffit dans le cas particulier que nous venons d'énoncer, lorsqu'on ne cherche que les équations générales de l'axe de la verge; mais, dans le cas général où la verge à double courbure était primitivement courbe, on bien où, l'axe étant rectiligne, la section n'a pas une des formes donnant $\mu = \mu'$, il est indispensable d'introduire aussi dans le calcul ce troisième moment M_z , perpendiculaire aux deux autres, et qui tend à plier la verge droite obliquement aux axes principaux de ses sections, ou à faire tourner le rayon de courbure sur le plan des sections de la verge courbe. Mais cela exige impérieusement que l'on introduise aussi l'angle τ qui mesure cette rotation et dont la prise en considération est nécessaire, en tous cas, pour déterminer les déplacements des points hors de l'axe, et pour fixer même la valeur de certaines constantes des équations définitives de l'axe. » • •

INSTITUT DE FRANCE.

ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES.

Extrait des Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, tome XIX.
séance du 15 juillet 1844.

DEUXIÈME NOTE

Sur l'état d'équilibre d'une verge élastique à double courbure, lorsque les déplacements éprouvés par ses points ne sont pas très-petits;

PAR M. DE SAINT-VENANT.

1. Dans la Note insérée au *Compte rendu* du 1^{er} juillet, j'ai fait remarquer que le théorème de Poisson, consistant en ce que le moment de torsion (θ ou M_t) est constant dans toute l'étendue d'une verge élastique (*), ne s'observe qu'à condition que le moment des forces autour du rayon de courbure soit partout nul.

» Cette condition n'est remplie pour tous les systèmes de forces qui peuvent agir aux extrémités de la verge, ainsi qu'à ses divers points, d'une manière continue, que lorsque l'axe est rectiligne dans l'état primitif, et que les sections transversales sont toutes des figures régulières (en appelant généralement ainsi les figures où toutes les droites tracées dans leur plan par leur centre de gravité sont des axes principaux d'inertie).

» On verra plus loin qu'elle peut encore être remplie lorsque l'axe primitif est une hélice, mais seulement pour des systèmes particuliers de forces.

» Je me propose, dans cette Note, d'ajouter plusieurs observations à celles

(*) Correspondance de l'École Polytechnique, 1816, ou *Traité de Mécanique*, 2^e édition.

que contient la Note précédente, et de considérer divers cas ou l'on peut déterminer facilement l'état d'équilibre de la verge pour des déplacements d'une grandeur quelconque.

2. Nous appellerons :

M_s, M_n les moments totaux des forces extérieures qui agissent, après les déplacements, entre le point M de la verge et l'une de ses extrémités, autour : 1° du rayon de courbure de l'axe au point M; 2° d'une droite normale au plan osculateur.

(En sorte que $M_s, -M_p$ seront ce qui est désigné par M_x, M_y au n° 5 de la Note citée, ces deux dernières désignations étant conservées pour les moments autour des axes principaux d'inertie de la section en M quand elle n'en a que deux.)

X, Y, Z les binômes $dy d^2z - dz d^2y, dz d^2x - dx d^2z, dx d^2y - dy d^2x$.

On aura, M_x, M_y, M_z étant toujours les moments autour de parallèles aux coordonnées menées par M,

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_s = \frac{\rho X}{ds^2} M_x + \frac{\rho Y}{ds^2} M_y + \frac{\rho Z}{ds^2} M_z, \\ M_p = M_x \frac{\rho}{ds} d \frac{dx}{ds} + M_y \frac{\rho}{ds} d \frac{dy}{ds} + M_z \frac{\rho}{ds} d \frac{dz}{ds}, \\ M_t = \frac{dx}{ds} M_x + \frac{dy}{ds} M_y + \frac{dz}{ds} M_z. \end{array} \right.$$

Observons d'abord que, dans le cas général où le moment M_p n'est pas nul, il se trouve lié avec celui de torsion M_t ou θ par une relation qui remplace le théorème $dM_t = 0$ de Poisson. Cette relation générale, que M. Wantzel a reconnue et m'a fait apercevoir, est

$$(13) \quad \frac{dM_t}{ds} = \frac{M_p}{\rho}.$$

En effet, si l'on différencie la troisième équation (12), on a, eu égard à la deuxième et à ce que

$$\frac{dx}{ds} dM_x + \frac{dy}{ds} dM_y + \frac{dz}{ds} dM_z = 0 \quad (*),$$

précisément la relation que nous venons d'écrire.

(*) Voyez ce résultat aux nos 317, 318 de la *Mécanique* de Poisson, où ce que nous appelons M_s est désigné par $X, + P' + R(b - \gamma) - Q(c - x)$, et ainsi des deux autres moments.

• Observons encore que, dans tous les cas où la section est une *figure régulière*, on peut, comme au n° 5 de la première Note, supposer $e + t = 0$, ce qui réduit les équations (6) à

$$(14) \quad M_n = E\mu \left(\frac{1}{\rho} - \frac{\cos t}{\rho_s} \right), \quad M_p = E\mu \frac{\sin t}{\rho_s}, \quad M_t = 2G\mu \left(\frac{dt}{ds} + \frac{1}{r} - \frac{1}{r_s} \right).$$

Mais, tant que M_p ne disparaît pas, l'intégration paraît toujours difficile.

• 3. Le cas où M. Binet, et ensuite M. Wantzel, ont intégré les équations, est celui où l'on a, non-seulement $\frac{1}{\rho_s} = 0$, $\frac{1}{r_s} = 0$, mais encore μ constant, et où les forces n'agissent qu'à l'extrémité de la verge, en sorte qu'en les réduisant à une seule force g , et à un couple h , perpendiculaire à sa direction, on a, celle-ci étant prise pour axe des z ,

$$M_x = gy, \quad M_y = -gx, \quad M_z = h.$$

• 4. L'intégration est encore facile dans le cas où la section de la verge peut varier de grandeur et même de forme d'un point à l'autre de l'axe primitivement rectiligne, mais sans cesser d'être *régulière*, et où les forces se réduisent à des *couples* agissant dans des plans parallèles entre eux.

• Alors μ varie, le couple h peut varier aussi d'une manière continue, et l'on a, en prenant toujours l'axe des z perpendiculaire aux plans des couples,

$$M_x = 0, \quad M_y = 0, \quad M_z = h, \quad \frac{1}{\rho_s} = 0, \quad \frac{1}{r_s} = 0.$$

Les équations (12) et (14) donnent

$$M_p = 0 = h \frac{\rho}{ds} d \frac{ds}{ds}, \quad M_t = h \frac{ds}{ds} \left(\frac{ds}{ds} \text{ constant} \right)$$

Donc la courbe affectée par l'axe de la verge fait un angle constant avec le plan des couples. Appelons φ cet angle; si l'on observe que

$$M_x = M_z \frac{\rho X}{ds} + M_t \frac{dx}{ds},$$

on a, pour déterminer x , y , z en s , les trois équations différentielles

$$(15) \quad \frac{ds}{ds} = \sin \varphi, \quad dx^2 + dy^2 + dz^2 \cos^2 \varphi, \quad dx dy^2 - dy dz^2 = \frac{h ds^2}{E \mu} \cos^2 \varphi.$$

Elles donnent, en différenciant la seconde,

$$d^2x = -\frac{h}{E\mu} dy ds, \quad d^2y = \frac{h}{E\mu} dx ds,$$

et, en remplaçant, dans celles-ci,

$$dy \text{ par } \sqrt{ds^2 \cos^2 \varphi - dx^2}, \quad dx \text{ par } -\sqrt{ds^2 \cos^2 \varphi - dy^2},$$

elles s'intègrent, et l'on a, en supposant $s = 0$ pour $z = 0$,

$$(16) \quad x = -\cos \varphi \int ds \sin \int \frac{h ds}{E\mu}, \quad y = \cos \varphi \int ds \cos \int \frac{h ds}{E\mu}, \quad z = s \sin \varphi.$$

Les équations de l'axe s'obtiennent donc par des quadratures qui dépendent de la manière dont $\frac{h}{E\mu}$ est fonction de s .

» 5. Si $\frac{h}{E\mu}$ est constant, elles deviennent (c, c', c'', c''' étant des constantes arbitraires),

$$x = c'' + \frac{E\mu \cos \varphi}{h} \cos \left(c + \frac{hs}{E\mu} \right), \quad y = c'' + \frac{E\mu \cos \varphi}{h} \sin \left(c' + \frac{hs}{E\mu} \right), \quad z = s \sin \varphi.$$

Elles appartiennent à une hélice.

» Déjà M. Wantzel, dans une communication faite le 29 juin à la Société Philomatique, a remarqué que la courbe à double courbure, affectée par une verge primitivement cylindrique, sollicitée par un couple, est nécessairement une hélice.

» C'est une généralisation du résultat d'Euler (*), consistant en ce que lorsque la courbe provenant de la verge, ainsi sollicitée, est plane, elle ne peut être qu'un arc de cercle.

» 6. Si la verge est encastrée à l'une de ses extrémités, on peut prendre ce point pour origine des coordonnées, et un plan passant par la direction primitive de la verge pour plan des yz . Les constantes doivent être déterminées de manière que pour $s = 0$, on ait $x = 0, y = 0, z = 0, \frac{dx}{ds} = 0, \frac{dy}{ds} = \cos \varphi$, et les équations de la courbe deviennent :

(*) *Methodus inveniendi, etc., additamentum de curvis elasticis.*

$$x + \frac{E_{\mu} \cos \varphi}{h} = \frac{E_{\mu} \cos \varphi}{h} \cos \frac{hz}{E_{\mu}}, \quad y = \frac{E_{\mu} \cos \varphi}{h} \sin \frac{hz}{E_{\mu}}, \quad z = s \sin \varphi.$$

Le cylindre sur lequel l'hélice est enroulée a donc sa base parallèle au plan du couple; le centre de cette base est à une distance de l'axe primitif de la verge et du point d'encastrement, égale à son rayon $\frac{E_{\mu}}{h} \cos \varphi$, et l'inclinaison constante φ du filet de l'hélice sur la base est celle de l'axe primitif sur le plan du couple.

7. L'axe étant déterminé, si l'on veut connaître la position des points de la verge hors de l'axe, il faut déterminer les valeurs de l'angle ϵ . On obtient d'abord facilement, au moyen des équations différentielles,

$$(17) \quad \frac{1}{\tau} = \frac{h \sin \varphi}{E_{\mu}};$$

substituant dans $2G\mu \left(\frac{ds}{ds} + \frac{1}{\tau} \right) = M_t = h \sin \varphi$, on a

$$\epsilon = \left(\frac{E}{2G} - 1 \right) \sin \varphi \int \frac{h ds}{E_{\mu}},$$

ou, lorsque $\frac{h}{E_{\mu}}$ est constant et que l'on fait passer par l'axe des x le plan osculateur primitif et arbitraire de la verge droite, ce qui donne $\epsilon = 0$ au point d'encastrement,

$$\epsilon = \left(\frac{E}{2G} - 1 \right) \frac{hs}{E_{\mu}}.$$

Les droites matérielles qui, sur chaque section, se trouvaient primitivement dans ce plan, font maintenant ces angles ϵ avec les plans osculateurs de l'hélice, ce qui détermine complètement les positions nouvelles des divers points des sections.

On déterminerait facilement, de même, $\frac{1}{\tau}$ et $\epsilon = \int \left(\frac{M_t}{2G\mu} - \frac{1}{\tau} \right) ds$ dans le cas du n° 3, traité par MM. Binet et Wantzel.

8. Observons à ce sujet que lorsqu'une verge, primitivement droite et à section régulière, est assujettie à une de ses deux extrémités seulement, et libre ou simplement appuyée à l'autre, le calcul de ϵ n'est pas nécessaire pour déterminer les constantes de l'équation de l'axe. La forme de cet axe, et sa position, peuvent être déduites complètement, alors, des équations différentielles de Lagrange, complétées et intégrées par M. Binet.

• Mais, ainsi que nous l'avons dit à la Note du 1^{er} juillet, l'intervention de l'angle ϵ est indispensable en général, par exemple lorsque la verge, même droite et à section régulière, est assujettie en un second point où sa section doit observer, comme à celui d'encastrement, une certaine polarité, ainsi qu'il arriverait si une verge à section carrée devait, quelque part, passer par un trou carré de mêmes dimensions que la section. Alors, pour fixer les valeurs des forces indéterminées produisant l'assujettissement, et qui entrent nécessairement dans les équations différentielles, il faudrait poser la condition que toutes les lignes matérielles de la section, en cet endroit, se sont conservées parallèles à leurs directions primitives : or, on y parvient en exprimant que celle de ces lignes qui faisait primitivement un angle nul avec le plan choisi pour plan osculateur, fait, avec le plan osculateur nouveau, précisément l'angle $\int \left(\frac{M_1}{2G\mu} - \frac{1}{r} \right) ds \doteq \epsilon$. C'est ainsi que nous avons déjà opéré (Mémoire du 6 novembre 1843, n^o 26, *Comptes rendus*, t. XVII, p. 1026) pour déterminer la petite flexion d'un anneau encasté et sollicité par des forces perpendiculaires à son plan.

• 9. Supposons enfin que la verge ait primitivement la forme d'une hélice.

• La solution, donnée au Mémoire du 6 novembre, du problème de son allongement très-petit, prouve que l'hélice *se déforme*, et qu'elle ne resterait une hélice qu'autant que les points d'attache des forces seraient disposés de manière à annuler certaines constantes. Le problème serait compliqué, à plus forte raison, dans le cas de déplacements d'une amplitude quelconque, et on ne voit pas, d'ailleurs, comment on pourrait parvenir alors à une intégration générale des équations (14).

• Mais on peut s'y prendre d'une manière inverse. On peut supposer, comme a fait M. Giulio, de l'Académie de Turin (*Mémoires*, année 1841) que la courbe d'axe, après l'action des forces, est encore une hélice, et chercher quel système de forces remplit cette condition.

• Je ne donne pas le détail du calcul, que j'ai étendu au cas général où les sections transversales de l'hélice, toutes égales et semblablement placées par rapport à l'axe de son cylindre, ne sont cependant pas des figures régulières ou telles que $\mu = \mu' \pm \mu''$. J'ai trouvé que les forces devaient se réduire à une seule dirigée suivant l'axe du cylindre, et à un couple autour du même axe, et qu'il devait y avoir une certaine relation constante entre les moments M_1 et M_2 , en sorte que l'on obtient autant d'équations (non différentielles) qu'il en faut pour déterminer le rayon et le pas de la nouvelle hélice.

» Lorsque la section transversale est une figure régulière, on peut prendre M_r pour M_z , M_x pour M_y ; la relation obligée dont je viens de parler se réduit à

$$M_r = 0,$$

qui donne

$$\varepsilon = 0;$$

en sorte que si l'on appelle g la force, h le moment du couple, R_0 le rayon du cylindre de l'hélice primitive, φ_0 l'angle constant de ses éléments avec la base, R et φ les deux quantités correspondantes dans la nouvelle hélice, on a, pour déterminer celles-ci, la première et la troisième équation (14), ou

$$\begin{aligned} g R \sin \varphi + h \cos \varphi &= E \mu \left(\frac{\cos' \varphi}{R} - \frac{\cos' \varphi_0}{R_0} \right), \\ -g R \cos \varphi + h \sin \varphi &= 2 G \mu \left(\frac{\sin \varphi \cos \varphi}{R} - \frac{\sin \varphi_0 \cos \varphi_0}{R_0} \right), \end{aligned}$$

faciles à résoudre par rapport à R et φ pour des valeurs numériques attribuées aux quantités données g , h , R_0 , φ_0 , μ . Ces formules s'accordent avec celles du Mémoire de M. Giulio, quand g et h ont entre eux une relation telle que l'hélice s'allonge ou se raccourcisse sans se tordre ou se détordre, on réciproquement : elles s'accordent avec celles que j'ai données le 6 novembre lorsque h est nul, et que $R - R_0$, $\varphi - \varphi_0$ sont très-petits. La circonstance $\varepsilon = 0$, et la supposition que les termes altérant la forme hélicoïdale s'évanouissent, rendent semblables les résultats de nos deux analyses, et les différences que j'avais cru y apercevoir n'étaient qu'apparentes. »

IMPRIMERIE DE BACHELIER

RUE DU JARDINET, N° 12.

80N 679591



